ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«СЕВЕРО- ОСЕТИНСКИЙ МЕДИЦИНСКИЙ КОЛЛЕДЖ»
МИНИСТЕРСТВА ЗДРАВООХРАНЕНИЯ РСО-АЛАНИЯ

МЕТОДИЧЕСКИЕ РАЗРАБОТКИ ЛЕКЦИОННЫХ ЗАНЯТИЙ

Учебная дисциплина*:* «Математика»

По специальности: 34.02.01. Сестринское дело

Квалификация: Медицинская сестра/Медицинский брат

Уровень подготовки: на базе основного общего образования

Составитель (и): Караева Мая Сафарбиевна, преподаватель математики
ГБПОУ СПО «СОМК» МЗ РСО-АЛАНИЯ

Владикавказ 2023

Рассмотрена и согласована
на заседании ЦМК
(название ЦМК)

Рассмотрена на заседании
общеобразовательной ЦМК

Протокол №

От ____ ____________ 2023 г.

Председатель

________________ С.С. Томаева

Рассмотрена и одобрена на заседании
методического совета ГБПОУ "СОМК"

МЗ РСО-А.

Зам. директора по научно-методической
работе ГБПОУ "СОМК" МЗ РСО-А.

__________________ А.М. Караева

«_____»_____________2022 г.

Протокол № ____
от «___»__________ 2023 г.

Методическая разработка составлена в соответствии с требованиями ФГОС СПО по специальностям, Положением об учебно-методическом сопровождении программ подготовки специалистов среднего звена в ГБПОУ «СОМК» МЗ РСО-Алания, Положением о фонде оценочных средств в ГБПОУ «СОМК» МЗ РСО-Алания и содержат перечень указаний для организации самостоятельной (внеаудиторной) работы студентов по математики. 34.02.01 «Сестринское дело»

Лекция 1
Тема: Математика в науке, технике, экономике, информационных технологиях и практической деятельности.
Цели и задачи математики при освоении профессии.
Вид занятия: лекция.

Оборудование учебного кабинета:
- рабочее место преподавателя;
- посадочные места по количеству обучающихся;
- учебно-методический комплекс по дисциплинам «Алгебра» и «Геометрия»;
- наглядные пособия: таблицы, карточки с заданиями

Воспитательные.
- Формирование профессионально-значимых качеств личности специалиста, привитие любви к избранной профессии;
- Воспитание у студентов добросовестного отношения к учебе и работе;
- Сформировать стремление и творческое отношение к знаниям;
- Формировать добросовестное отношение к труду.

Средства технической поддержки: таблицы, мультимедийные средства обучения - презентации.

Математика есть универсальный язык науки и мощный метод научного исследования.
Что такое математика? Это все, то нас окружает. Будет затруднительно найти хотя бы одну дисциплину, которой не коснулась бы математика. Математика важнейшая наука в жизни людей. Без нее нам не справиться в любой из сфер жизни.
В науке химии без математики нельзя вычислить коэффициент вероятности какой-либо реакции. Физика - точная наука, но и она построена на расчетах и вычислениях. Экономика - расходы, доходы, проценты урожая и прибыли - все рассчитывается с помощью аппарата математики.
Информационные технологии - IT - создание, сохранение, управление и обработка данных с применением вычислительных операций, вычислительной техники.
В практической деятельности также не обойтись без математики. К примеру, приобретение шкафа несет в себе измерения, подсчеты и замеры комнаты.

Математика играет важную роль в естесственно-научных, инженерно-технических и гуманитарных исследованиях. Без современной математики с ее развитым логическим и вычислительным аппаратом был бы невозможен прогресс в различных областях человеческой деятельности. Математика - это фундамент.

Математические идеи и методы проникают в управление весьма сложными и большими системами различной природы: полетами космических кораблей, отраслями промышленности, работой обширных транспортных систем и др. видов деятельности.

Математика является не только мощным средством решения прикладных задач и универсальным языком науки, но также и элементом общей культры. Поэтому математическое образование следует рассматривать как важнейшую составляющую в системе подготовки современного медицинского специалиста.

Мы имеем быстроразвивающееся обществ. Развитие медицины также бежит вперед. Медицина сейчас как никогда тесно связана с математикой. Все современные высокотехничные операции (на глазах, на мозге, лапароскопические, производятся на новейшей современной технике. Без знания азов математики трудно разобраться в компьютерной технике.

Математика нужна медикам, чтобы грамотно прочитать кардиограмму или не ошибиться с дозой вводимых лекарств, лаборанты подсчитывают результаты анализов.

В настоящее время в медицине решаются множество математических задач, таких как:

1) задачи на проценты
2) пропорции
3) антропометрические индексы
4) задачи на математические вычисления

В чем заключается роль математики в современном мире? Ее роль - главная, т.к. все наполнение жизни современного человека - это общение с техникой. Роль и место математики в современном мире велико. Развитие любой отрасли связано с созданием новой техники (например, новые улучшенные мед. аппараты).

Математика дает людям мощные методы изучения и понимания окружающего мира, методы исследования как теоретических, так и чисто практических проблем. Современная математика в сочетании с информатикой становится как бы междисциплинарным инструментарием, который выполняет 2 основные функции:

1. обучающую специалиста-профессионала умению правильно задавать цель тому или иному процессу. Определить условия и ограничения в достижении цели.
2. аналитическую, т.е. "проигрывание" на моделях возможных ситуаций и получение оптимальных решений.

Причина, по которой без математических методов сейчас не обходится не только техника, механика. электроника, но и медицина, экология и др., проста - для математических методов характерны:
- четкость формулировок и определений;
- использование точных количественных оценок;
- логическая строгость;
- сочетание индуктивного и дедуктивного подходов;
- универсальность.

Использование математических методов формирует так называемый математических стиль мышления, т.е. абстрактный, логический, идеально-строгий и - самое главное - нацеленный на поиск закономерностей. Профессионал, грамотно и аккуратно применяющий математические методы способен принести пользу в любой сфере деятельности, в том числе и медицине.

Математика в повседневной жизни

Взрослые люди после окончания университета или колледжа не перестают каждый день решать математические задачи. Как успеть на поезд? Получится ли из килограмма мяса приготовить ужин для десяти гостей? Сколько калорий в блюде? На какое время хватит одной лампочки? Эти и многие другие вопросы имеют прямое отношение к царице наук и без нее не решаются. Получается, математика в нашей жизни незримо присутствует практически постоянно. Причем чаще всего мы этого даже не замечаем. Математика в жизни общества и отдельного человека затрагивает огромное количество областей. Некоторые профессии без нее немыслимы, многие появились только благодаря развитию отдельных ее направлений. Современный технический прогресс тесно связан с усложнением и развитием математического аппарата. Компьютеры и телефоны, самолеты и космические аппараты никогда бы не появились, не будь людям известна царица наук. Однако роль математики в жизни человека этим не исчерпывается. Наука помогает ребенку осваивать мир, обучает более эффективному взаимодействию с ним, формирует мышление и отдельные качества характера. Впрочем, сама по себе математика не справилась бы с такими задачами. Как было сказано выше, огромную роль играет подача материала и особенности личности того, кто знакомит ребенка с миром.

Задачи с практическим содержанием

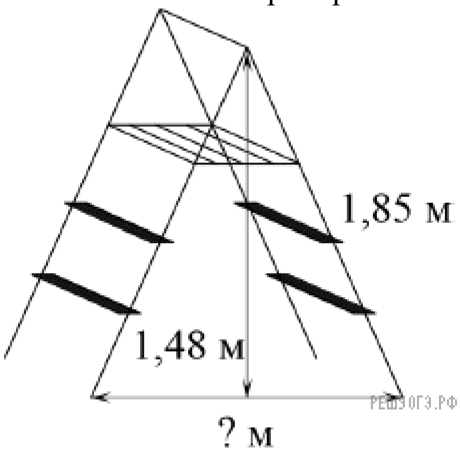
1. В аптеку привезли парацетамол стоимостью 85 рублей за упаковку. Подоходный налог составит 10% от продажной стоимости. Владелец аптеки хочет получить чистую прибыль 15%. Какова должна быть стоимость одной упаковки этого лекарства?

2. Технология изготовления дискет состоит из четырех этапов. На каждом из них увеличивается содержание кремния на определенное число процентов по отношению к результату предыдущего этапа: на первом этапе - на 25%, на втором этапе - на 20%, на третьем этапе - на 10%, на четвертом этапе - на 8%. На сколько процентов в результате увеличится содержание кремния?

3. На станции технического обслуживания три механика отремонтировали за месяц 78 автомобилей. Первый механик отремонтировал в 1,5 раза больше автомобилей, чем

второй, а третий – на 6 автомобилей больше, чем первый. Сколько автомобилей отремонтировал каждый механик?

4. Длина стремянки в сложенном виде равна 1,85 м, а её высота в разложенном виде составляет 1,48 м. Найдите расстояние (в метрах) между основаниями стремянки в разложенном виде. (Источник: МИОО: Тренировочная работа по математике 19.02.2019 вари-



ант MA90501.)

5. На пост председателя школьного совета претендовали два кандидата. В голосовании приняли участие 120 человек. Голоса между кандидатами распределились в отношении 3:5. Сколько голосов получил победитель?

Домашнее задание

1. Решить задания

1. Найдите значение выражения $\left(\frac{8}{33}+\frac{13}{22}\right):\frac{5}{18}.$

2. Найдите значение выражения $(\sqrt{85}-1)^2$

3. Решите уравнение $\frac{x+9}{7}-\frac{x}{2}=2.$

4. Упростите выражение $\frac{xy+y^2}{15x}\cdot\frac{3x}{x+y}.$ и найдите его значение при $x=18$ и $y=7,5.$ В ответе запишите найденное значение.

2.Подготовить доклады:

1) "Формирование понятия числа как результата измерения величин",

2) "Формирование понятия числа как количественной характеристики множества",

Программное обеспечение, Интернет – ресурсы
Ресурсы локального доступа

1. Электронное приложение к учебнику Алгебра и начала математического анализа: учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений [Электронный ресурс] /А.Н. Колмогоров. М.: Просвещение, 2009. – 1 электрон. опт. диск (DVD)

Ресурсы удаленного доступа

1. Реализовано в России [Электронный ресурс] / Московский институт открытого образования, при участии Московского центра непрерывного математического образования: МИОО, 2009. – Режим доступа к сайту.: http://mathege.ru
2. Методические и учебные материалы по математике. [Электронный ресурс] / Математика в Интернет. ООО «Физикон», 1999. – Режим доступа к сайту.: http://www.college.ru/mathematics
3. Интернет-сборник задач по школьному курсу математики [Электронный ресурс] / 2009. – Режим доступа к сайту.: 1000zadach.info

Тема 1. Развитие понятия о числе.

Цели учебного занятия:
Образовательная:
Расширение понятийной базы по теме числа и отработка навыков работы с числами.
Подготовить студентов к восприятию материала по алгебре и начале анализа, изучаемые в профессиональных образовательных организациях.
Развивающая:
Формировать умение осуществлять поиск информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач.
Формировать умение анализировать рабочую ситуацию.
Нести ответственность за результаты своей работы.
Развитие профессионального мышления и поведения
Воспитательная:
Формировать понимание сущности и социальной значимости своей будущей профессии, развивать к ней устойчивый интерес

Ход занятия

Числа очень важны в нашем мире. Без чисел нам было бы очень трудно и неинтересно жить. Хоть числа и произошли очень давно, их актуальность в современном мире приобретает все большее значение. Все современные технологии связаны с цифрами и называются цифровыми, вся информация и даже музыка хранится в цифровом формате.

1.Действительные числа .

1.1 Числовые множества

N – множество натуральных чисел,

Z – множество целых чисел ,

Q – множество рациональных чисел, $\left\{\frac{m}{n} | m \in Z, n \in N\right\}$

I – множество иррациональных чисел.

Все эти числа вместе R – множество всех действительных чисел.

Рациональные и иррациональные числа объединились в новое множество – множество **действительных чисел** R

1.2 Рациональные числа

Обыкновенные дроби. Обыкновенная дробь – это число вида m /n ,

где m и n– натуральные числа. Число m называется числителем дроби, n – знаменателем. Всякое натуральное число можно представить в виде обыкновенной дроби со знаменателем 1.

Дробь m/ n называется правильной, если её числитель меньше знаменателя, и неправильной, если её числитель больше знаменателя или равен ему. Основное свойство дроби: если числитель и знаменатель данной дроби умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то получится дробь, равная данной. Десятичные дроби. Десятичная дробь – это любая числовая дробь, знаменатель которой равен 10, 100, 1000 и вообще 10n .

В виде десятичной дроби можно представить любую обыкновенную дробь, знаменатель которой является делителем некоторой степени числа 10. Десятичная запись — это форма записи десятичных дробей, где целая часть отделяется от дробной с помощью обычной точки или запятой. При этом сам разделитель (точка или запятая) называется десятичной точкой. Бесконечная десятичная дробь – после запятой содержится бесконечно много десятичных знаков.

Проблемная ситуация. Переходим к изучению иррациональных чисел.

Как найти длину диагонали квадрата со стороной 1см? Длина диагонали квадрата по теореме Пифагора равна √2 - это иррациональное число.

Иррациональным числом называется бесконечная десятичная непериодическая дробь.

Теорема. Любую обыкновенную дробь можно представить в виде бесконечной десятичной дроби.

Последовательно повторяющаяся группа цифр (минимальная) после запятой в десятичной записи числа называется периодом, а бесконечная десятичная дробь, имеющая такой период в своей записи, называется периодической. Для краткости принято период записывать один раз, заключая его в круглые скобки: 0,2121…= 0, (21) – чистая периодическая дробь, так как период начинается сразу после запятой; 2,3454545…= 2,3(45); 2, 73 = 2,73000…= 2,73(0) – смешанные периодические дроби, так как между запятой и периодом есть другие десятичные знаки.

Немного истории. Число «π» – это отношение длины окружности к ее диаметру, π = 3,14159…

Правило перевода бесконечной периодической дроби в обыкновенную.

Чтобы обратить периодическую дробь в обыкновенную, надо из числа, стоящего до второго периода, вычесть число, стоящее до первого периода, и записать эту разность числителем, а в знаменателе написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде, и после девяток дописать столько нулей, сколько цифр между запятой и первым периодом.

Пример.

0,(45) = $\frac{45-0}{99} = \frac{5}{11}$; 3,1(73) = $\frac{3173-31}{990} = \frac{3142}{990} = \frac{1571}{495}$.

Задание для самостоятельной работы.

Обратить периодическую дробь в обыкновенную:

1) 0,(3); 2) 0,2(1); 3) 0,2(19); 4) 3,(73); 5) 2,2(41).

1.3 Стандартный вид положительного действительного числа.

Любое положительное число *a* можно представить в виде $a_1 \cdot 10^n$,

Где $1 \le a_1 < 10$, а *n* – целое число.

Показатель *n* называют *порядком числа*.

Примеры.

$a = 395 = 3,95 \cdot 10^2$;

$a = 4,13 = 4,13 \cdot 10^0$;

$a = 0,0023 = 2,3 \cdot 10^{-3}$.

1.4 Приближённые значения чисел. Абсолютная и относительная погрешности.

При округлении десятичной дроби до какого-нибудь разряда все следующие за этим разрядом цифры заменяют нулями, а если они стоят после запятой, то их отбрасывают.

Если первая следующая за этим разрядом цифра *больше или равна пяти*, то последнюю оставшуюся цифру *увеличивают на 1*.

Если же первая следующая за этим разрядом цифра *меньше 5*, то последнюю оставшуюся цифру *не изменяют*.

Примеры округления чисел:

6,527 → 6,5	2,195 → 2,2	0,950 → 1,0	0,850 → 0,8
0,456 → 0,5	1,450 → 1,4	4,851 → 4,9	0,05 → 0,0

Задание.

1.Округлить числа:

- до единиц – 965,049;

- до десятых – 348,645;

- до целых – 770,357;

- до сотых – 2953,697;

- до единиц тысяч – 1536,728.

2. Сколько потребуется автомашин для перевозки 3,25 тонн груза, если одна машина может взять не более 1 тонны

Приближённые значения появляются не только при округлении чисел. Чаще они возникают при различных измерениях (длин, масс, температур и т.д.). При этом важно знать, с какой точностью выполнено измерение.

Пусть ***a*** – приближённое значение числа α.

Абсолютной погрешностью приближенного значения числа α называется модуль разности чисел α и ***a***, то есть $|\alpha - a|$.

Относительной погрешностью приближенного значения называется отношение абсолютной погрешности к модулю приближённого значения. Относительную погрешность обычно выражают в процентах, то есть

$$\frac{|\alpha - a|}{|a|} \cdot 100\%$$

Пример. Взвесив кондитерское изделие, масса которого равна 54,12705 г, на весах с ценой деления шкалы 0,1 г, получили приближённое значение массы 54,1 г. Найти абсолютную и относительную погрешности этого приближённого значения.

Решение.

1) $|54{,}12705 - 54{,}1| = 0{,}02705$ (абсолютная погрешность);

2) $\frac{|54{,}12705 - 54{,}1|}{|54{,}1|} \cdot 100\% = \frac{0{,}02705}{54{,}1} \cdot 100\% = 0{,}05\%$ (относительная погрешность).

Если абсолютная погрешность приближённого значения ***a***, найденного для интересующего числа α, не превосходит некоторого числа ***h***, то пишут $\boldsymbol{\alpha = a \pm h}$; говорят, что $\boldsymbol{a}$ – приближённое значение числа $\boldsymbol{\alpha}$ *с точностью до* $\boldsymbol{h}$.

1.5 Десятичные приближения действительного числа по недостатку и по избытку.

Любое действительное число можно представить в виде бесконечной десятичной дроби, причём *периодической*, если число *рациональное*, и *непериодической*, если число *иррациональное*.

Пример.

$$\frac{14}{55} = 0{,}2(54) = 0{,}2545454\ldots$$

$0{,}254$ – десятичное приближение числа $\frac{14}{55}$ с точностью до 0,001 по недостатку;

$0{,}255$ – десятичное приближение числа $\frac{14}{55}$ с точностью до 0,001 по избытку;

$$0{,}254 < 0{,}2545454\ldots < 0{,}255$$

2. Задачи на проценты, растворы и концентрацию

2.1 Проценты

Процент – это сотая часть от числа.

$$\mathbf{1\% = \frac{1}{100} = 0{,}01}$$

- Чтобы ***перевести проценты в дробь***, нужно убрать знак % и разделить число на 100. $(12\% = \frac{12}{100} = 0{,}12)$
- Чтобы перевести десятичную дробь в проценты, нужно дробь умножить на 100 и добавить знак %. (0,14 = 0,14·100% = 14%)
- Чтобы ***перевести обыкновенную дробь в проценты***, нужно сначала превратить её в десятичную дробь. ($\frac{2}{5} = 0{,}4; \quad 0{,}4 \cdot 100\% = 14\%$)

Перевод дробей в проценты.

Проценты тесно связаны с обыкновенными и десятичными дробями. В повседневной жизни нужно знать о числовой связи дробей и процентов.

1 = 100%

Дробь	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{50}$
Десятичная дробь	0,5	0,25	0,75	0,2	0,4	0,6	0,1	0,05	0,02
Проценты	50%	25%	75%	20%	40%	60%	10%	5%	2%

Полезные формулы:

- если величину x увеличить на p процентов, получим $x\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)$;
- если величину x уменьшить на p процентов, получим $x\cdot\left(1-\frac{p}{100}\right)$;
- если величину x увеличить на p процентов, а затем уменьшить на q процентов, получим $x\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{p}{100}\right)$;
- если величину x дважды увеличить на p процентов, получим $x\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$;
- если величину x дважды уменьшить на p процентов, получим $x\cdot\left(1-\frac{p}{100}\right)^2$.

2.2 *Три основных типа задач на проценты*:

<u>*Задача 1.*</u> *Найти указанный процент от заданного числа.*
Заданное число умножается на указанное число процентов, а затем произведение делится на 100.

Пример. Вклад в банке имеет годовой прирост 6%. Начальная сумма вклада равнялась 10000 руб. На сколько возрастёт сумма вклада в конце года?

Решение: $10000\cdot 6 : 100 = 600$ руб.

<u>*Задача 2.*</u> *Найти число по заданному другому числу и его величине в процентах от искомого числа.*
Заданное число делится на его процентное выражение и результат умножается на 100.

Пример. Зарплата в январе равнялась 1500 руб., что составило 7,5% от годовой зарплаты. Какова была годовая зарплата?

Решение: $1500 : 7{,}5\cdot 100 = 20000$ руб.

<u>*Задача 3.*</u> *Найти процентное выражение одного числа от другого.*
Первое число делится на второе и результат умножается на 100.

Пример. Завод произвёл за год 40000 автомобилей, а в следующем году – только 36000 автомобилей. Сколько процентов это составило по отношению к выпуску предыдущего года?

Решение: $36000 : 40000 \cdot 100 = 90\%$.

2.3 Задачи на растворы и концентрацию.

Концентрация раствора - это часть, которую составляет масса растворённого вещества от массы всего раствора.

Задача 1. Килограмм соли растворили в 9 л воды. ***Чему равна концентрация полученного раствора****? (Масса 1 л воды составляет 1 кг)*

Решение.

1 кг - масса растворённого вещества (соли);

9 кг - масса воды в растворе (не путать с общей массой раствора);

9 + 1 = 10 кг - общая масса раствора;

$$\frac{1}{10} = 0{,}1 = 10\%$$

Ответ: 10%

Задача 2. Сколько соли получится при выпаривании 375 граммов 12%-го раствора?

Решение.

Чтобы найти массу выпаренной соли из раствора, умножим общую массу раствора на процент концентрации. Не забудем предварительно перевести процент в десятичную дробь.

1) $12\% = \frac{12}{100} = 0{,}12$;
2) $375 \cdot 0{,}12 = 45$ (г).

Ответ: 45 граммов соли.

Задача 3. В сосуд, содержащий 5 литров 12–ти процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 7 литров воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Решение.

В решении подобных задач помогает картинка. Изобразим сосуд с раствором схематично — так, как будто вещество и вода в нем не перемешаны между собой, а отделены друг от друга, как в коктейле. И подпишем, сколько литров содержат сосуды и сколько в них процентов вещества. Концентрацию получившегося раствора обозначим $\boldsymbol{x}$.

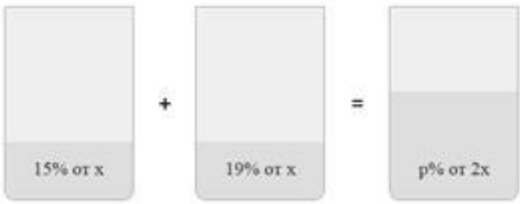
Первый сосуд содержал $0{,}12 \cdot 5 = 0{,}6$ литра вещества. Во втором сосуде была только вода. Значит, в третьем сосуде столько же литров вещества, сколько и в первом, составим уравнение: $0{,}12 \cdot 5 = \frac{x}{100} \cdot 12$; $x = 5$ (%).

*Ответ:*5%.

Задача 4. Смешали некоторое количество 15-ти процентного раствора некоторого вещества с таким же количеством 19-ти процентного раствора этого вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Решение.

Пусть масса первого раствора равна x. Масса второго — тоже x. В результате получили раствор массой $2x$. Рисуем картинку.



$0{,}15x + 0{,}19x = 0{,}34x = 0{,}17 \cdot 2x$

$0{,}17 = 17\%$

Ответ: 17%

Задача 5. Виноград содержит 90% влаги, а изюм — 5%. Сколько килограммов винограда требуется для получения 20 килограммов изюма?

Решение.

Внимание! Если вам встретилась задача «о продуктах», то есть такая, где из винограда получается изюм, из абрикосов урюк, из хлеба сухари или из молока творог — знайте, что на самом деле это задача на растворы. Виноград мы тоже можем условно изобразить как раствор. В нем есть вода и «сухое вещество». У «сухого вещества» сложный химический состав, а по его вкусу, цвету и запаху мы могли бы понять, что это именно виноград, а не картошка. Изюм получается, когда из винограда испаряется вода. При этом количество «сухого вещества» остается постоянным. В винограде содержалось 90% воды, значит, «сухого вещества» было 10%. В изюме 5% воды и 95% «сухого вещества». Пусть из x кг винограда получилось 20 кг изюма. Тогда 10% от x = 95% от 20.

Составим уравнение:

$0{,}1\,x = 0{,}95 \cdot 20$; $0{,}1\,x = 19$; $x = 190$ (кг)

Ответ: 190 кг.

Задача 6. Смешав 30-процентный и 60-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 36-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 41-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 30-процентного раствора использовали для получения смеси?

Решение.

Пусть масса первого раствора x, масса второго равна y. Масса получившегося раствора равна $x + y + 10$. Запишем два уравнения, для количества кислоты.

$$\begin{cases} 0{,}3x + 0{,}6y = 0{,}36 \cdot (x + y + 10); \\ 0{,}3x + 0{,}6y + 0{,}5 \cdot 10 = 0{,}41 \cdot (x + y + 10). \end{cases}$$

Решаем получившуюся систему. Сразу умножим обе части уравнений на 100, поскольку с целыми коэффициентами удобнее работать, чем с дробными. Раскроем

$$\begin{cases} 30x + 60y = 36x + 36y + 360; \\ 30x + 60y + 500 = 41x + 41y + 410; \end{cases}$$

скобки.

$$\begin{cases} 4y - x = 60; \\ 11x - 19y = 90; \end{cases}$$

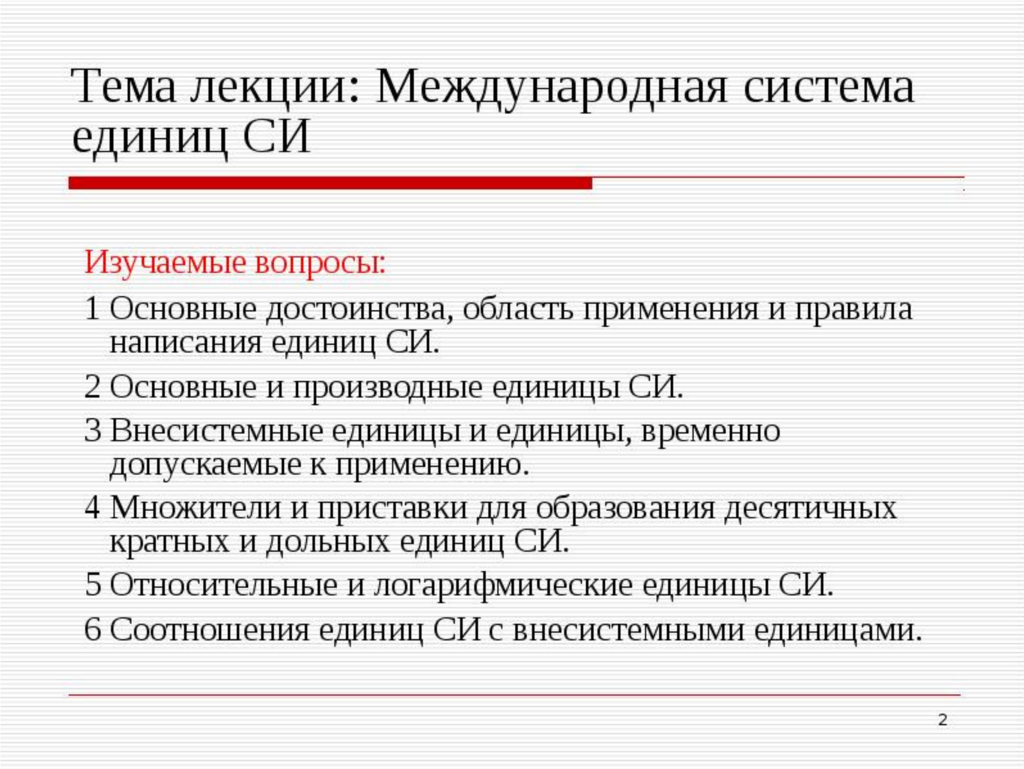
$$x = 60$$

; y = 30.

Ответ: 60 кг.

Домашнее задание.

1. Как обозначается множество действительных чисел? **Z, N, Q, R** (правильный ответ подчеркнуть) R
2. Какие из следующих утверждений N Z, Z N, Z Q, Q Z справедливы? (правильный ответ подчеркнуть) Z Q, N Z
3. Каким числом является значение алгебраического выражения $\sqrt{81?}$ 1) натуральным; 2) целым; 3) рациональным; 4) иррациональным (правильный ответ подчеркнуть)
4. Какие элементы множества являются натуральными числами (правильный ответ подчеркнуть) 5,14
5. Какие элементы множества являются целыми числами (правильный ответ подчеркнуть)
6. Какие элементы множества являются рациональными числами (правильный ответ подчеркнуть)
7. Сравните пару действительных чисел 2,39748 … 2,39784 (поставить знак)
8. Какая из двух точек находится на координатной прямой дальше от начальной точки 0, если эти точки имеют координаты: 4,783 и 4,793 (правильный ответ подчеркнуть)



Цель:

- объяснить обучаемым причину возникновения международной системы единиц СИ;
- показать, что представляют собой эталоны метра, килограмма, звука, давления, силы, времени;
- познакомить с историей измерения времени;
- развитие познавательных интересов обучаемых.

1. Немного истории.

На момент введения метрической системы в Европе XVIII века насчитывалось не менее четырехсот различных по величине единиц измерения, имевших одинаковое название и применявшихся в разных странах. До сих пор в США и Великобритании используются разные тонны - короткая (примерно 907 кг) и длинная (примерно 1016 кг). Для облегчения торговых операций каждое государство стремилось стандартизовать меры и таким образом облегчить торговые операции с соседями. Всего же в XI-XVIII веках по подсчетам историков в мире применялось не менее 250 тысяч единиц измерения.

У нас в России можно было насчитать не менее десятка мер веса: фунт, пуд, золотник, куна, берковец, безмен, гривна и гривенка, почка и капь, контарь и терези. При этом от случая к случаю могли менять не только абсолютные значения каждой из них, но и соотношения.

Отсюда нам с детства знакомы русские пословицы и поговорки, в которых использованы разные меры единиц. Сейчас мы с вами попытаемся объяснить несколько из них.

Например:

Борода с аршин, а сам с кувшин

От горшка - три вершка

Борода с локоть, а сам с ноготь

К милому семь вёрст не околица

Плечи - косая сажень.

Семи пядей во лбу

Мал золотник да дорог.

Чему же равны аршин, вершок, косая сажень, пядь и золотник?

Вопрос к обучаемым: Какие вы можете привести подручные средства измерений?

(Спичечный коробок, карандаш).

(Можно предложить обучаемым измерить свою пядь и локоть).

2. Немного истории о возникновении системы единиц СИ.

Точность весов и соответствие гирь определенным "государственным стандартам" начали регулярно проверять как по требованию таможенного ведомства, так и по просьбам и жалобам торговых людей уже с конца XVI века. Так, в архивах сохранилась жалоба таможенного головы Никиты Быкова от 1645 года с просьбой заменить весы и меры веса в Устюжне Железопольской. Иногда жалобы на неточность гирь и весов на различных таможнях поступали от иностранцев и, учитывая важность торговли с другими странами, удовлетворялись немедленно. Единой государственной организации по поверке мер и весов (то есть сличению их с эталоном) в России не существовало. Попытки систематизировать и стандартизировать системы мер и весов на государственном уровне были приняты в 1736 году Комиссией весов и мер во главе с главным директором Монетного правления графом Михаилом Головкиным. Она проработала до 1742 года и итогом её работы стала единая научно-обоснованная система основных российских мер и прототипов русских мер, узаконенная указом "О системе Российских мер и весов" от 11 октября 1835 года, которая просуществовала в России до 1927 года фактически в неизменном виде. В 1842 году было создано "Депо образцовых мер и весов". В 1892 году хранителем "Депо" стал Дмитрий Менделеев. В 1893 году Депо было переименовано в "Главную палату мер и весов". Итогом работы Палаты стал Закон 1899 года об утверждении Положения о мерах и весах, который устанавливал порядок хранения эталонов мер, расширял функции Палаты по поверке мер и вносил крупные нововведения в организацию поверочного дела в стране. Закон 1899 года помимо российских мер с 1 января 1900 года вводил в обращение и традиционные сегодня метрические меры - килограмм и метр.

Идея создания единой системы мер возникла во Франции еще в XVII-XVIII веках, однако была воплощена в жизнь лишь благодаря буржуазной революции 1789 года. В мае 1790 года Национальное собрание поручило Парижской академии наук подготовить новую систему мер. Физики Лавуазье (1743-1794) и Рене-Жюст Гаюи (1743-1822) подготовили материалы для определения веса воды - основу для измерения тяжести. За единицу веса приняли вес кубического дециметра дистиллированной воды, взятой при наибольшей плотности (+ 4 °С). Взвешивание проводилось в вакууме и в месте, находящемся на уровне моря и на широте 45°. Полученная величина была названа килограммом и составляла 1000 грамм (от греческого "грамма" - надпись, обозначение).

Дальше надо было убедить и другие страны провести у себя похожую реформу. В мае-июне 1799 года был созван Международный конгресс, но в нем приняли участие лишь несколько стран - Европу раздирала война. Тем не менее на нем удалось связать новые фундаментальные единицы с определенными природными явлениями. Метр составил сорокамиллионную долю земного меридиана, секунда - часть солнечных суток, килограмм - вес кубического дециметра воды при 4 °С, взвешенного при определенных условиях. Прототипы в виде линейки и гири из платины были представлены членам Французского парламента и участникам конгресса, а после сданы в Национальный Архив республики. Также были изготовлены железные копии эталонов метра и килограмма, их использовали как образцы при промышленном производстве гирь, линеек и мерных лент. Юридически метрическая система была введена во Франции в декабре 1799 года, однако практически стала обязательной в стране и её колониях только с 1 января 1840 года.

В 1872 году в Париже была созвана Международная комиссия по изготовлению образцов метрической системы для всех народов, в ней участвовали представители тридцати государств. Комиссия признала за основы метрической системы архивные метр и килограмм, изготовленные в 1799 году. В 1875 году семнадцатью странами была подписана Метрическая конвенция "для обеспечения международного единства и усовершенствования метрической системы" и учреждено Международное бюро мер и весов - постоянное учреждение, находящееся в предместье Парижа.

После революции 1917 года к соглашениям присоединилась и новая республика, РСФСР. По постановлению СНК (Совет Народных Комиссаров - аналог кабинета министров) следовало "положить в основание всех измерений международную метрическую систему мер и весов с десятичными подразделениями и производными. Принять за основу единицу длины - метр, а за основу единицы веса - килограмм. За образцы основных единиц метрической системы принять копию международного метра, носящую знак № 28, и копию международного килограмма, носящую знак № 12, изготовленные из иридиевой платины, переданные России I Международной Конференцией Мер и Весов в Париже в 1889 году и хранимые ныне в Главной Палате Мер и Весов в Петрограде".

В СССР пользоваться старыми единицами мер и весов запрещалось с 1 января 1927 года.

3. Эталон килограмма.

Национальные эталоны килограмма и метра есть у всех стран. Их международные прототипы вместе с двумя контрольными к каждому прототипу образцами ещё в 1889 году были помещены на хранение в специальное здание - Бретейльский павильон парка Сен-Клу в окрестностях Парижа. Прототип килограмма представляет собой платиновую цилиндрическую гирю, высота и диаметр которой равны по 39 мм. Сверка прототипа килограмма и метра с контрольными образцами проводится раз в 25 лет. За 108 лет килограмм потерял около 3·10-8 части своей части массы

Килограмм чахнет. Об этом ясно говорят сравнения с другими обитателями сейфа. Природа болезни загадочна, но все симптомы налицо: за сто лет килограмм теряет около 0,00000003-й части своей драгоценной массы.

Вопрос к обучаемым: Как вы думаете, к чему это может привести?

Похудение всего на 50 микрограмм (меньше веса соляной крупинки) может серьёзно исказить результаты сложных научных вычислений.

2003 год. Международная команда исследователей из Германии, Австралии, Италии и Японии под эгидой Немецкой лаборатории стандартов), ведёт переопределение килограмм, как массы определённого числа атомов изотопа кремния-28. В лаборатории сделан совершенно круглый килограммовый шар из чистого кристаллического кремния.

Если точно известно, какие атомы составляют кристалл, и на каком расстоянии они находятся друг от друга, то, измерив, размер шара, можно вычислить число атомов кремния, его составляющих. Это число и будет определением килограмма.

Для производства шара необходимо было получить изотоп кремния очень высокой степени очистки. Помощь в этом начинании оказала Россия - на старых, ещё советских ядерных оружейных фабриках имеются центрифуги, использовавшиеся для выработки высокообогащённого урана.

Полученный шар потребовалось измерить на "круглость". Кристалл был педантично замерен в полумиллионе точек. Вывод: шар - самое круглое творение рук человеческих. Если увеличить шар до размеров Земли, высота Эвереста составит всего четыре метра.

Интригующая особенность шара: совершенно невозможно на глаз определить, покоится он или вращается. Только если на поверхность упадёт пылинка, взгляду будет за что зацепиться.

основных единиц СИ. Второй проект, под названием "Электронный килограмм" начат в 2005 г. в Национальном институте стандартов и технологии США (NIST). Руководитель данного проекта Ричард Стайнер утверждает, что над созданием "электронного килограмма" он работает более десяти лет. Учёные под руководством доктора Стайнера создали прибор, который измеряет мощность, необходимую для генерации электромагнитного поля, с помощью которого можно поднять один килограмм массы. С его помощью учёным удалось определить массу в один килограмм с точностью до 99,999995 %.

4. Эталон метра.

Метр был впервые введён во Франции в XVIII веке и имел первоначально два конкурирующих определения: как длина маятника с полупериодом качания на широте 45°, равным 1 с (в современных единицах эта длина равна примерно 0,981 м).как одна сорокамиллионная часть Парижского меридиана (то есть одна десятимиллионная часть расстояния от северного полюса до экватора по поверхности земного эллипсоида на долготе Парижа).

Первоначально за основу было принято первое определение (8 мая 1790, Французское Национальное собрание). Однако, поскольку ускорение свободного падения зависит от широты и, следовательно, маятниковый эталон недостаточно воспроизводим, Французская Академия наук в 1791 предложила Национальному собранию определить метр через длину меридиана. Первый прототип эталона метра был изготовлен из латуни в 1795 году. Следует отметить, что единица массы (килограмм, определение которого было основано на массе 1 дм? воды), тоже была привязана к определению метра.В 1799 из сплава 90 % платины и 10 % иридия был изготовлен эталон метра, длина которого соответствовала одной сорокамиллионной части Парижского меридиана. В 1889 был изготовлен более точный международный эталон метра. Этот эталон тоже изготовлен из сплава платины и иридия и имеет поперечное сечение в виде буквы "X". Его копии были переданы на хранение в страны, в которых метр был признан в качестве стандартной единицы длины. Этот эталон всё ещё хранится в Международном бюро мер и весов, хотя больше по своему первоначальному назначению не используется. (Слайды 10, 11, 12. Приложение 1).

Хотя международный и национальный эталоны метра были изготовлены из сплава иридия и платины, отличающегося значительной твердостью и большим сопротивлением окислению, однако не было полной уверенности в том, что длина эталона с течением времени не изменится. Это объясняется тем, что металлические стержни, подвергшиеся ранее термической и механической обработке, получают внутренние упругие напряжения, которые вызывают медленные микрокристаллические изменения их структуры. При периодических сравнениях эталонов метра различных стран с международным прототипом нельзя обнаружить малых изменений их длины, так как все эталоны изготовлены из одного и того же сплава, и, следовательно, претерпевают одинаковые изменения. Погрешности сличения между собой платино- иридиевых штриховых метров находятся в пределах плюс/минус 1,1 * 10 -7 мм (плюс/минус 0,11 мкм).

Так как штрихи имеют значительную ширину, существенно повысить точность этого сличения нельзя. В 1895 году II-я Генеральная конференция по мерам и весам признала, естественным свидетелем размера метра является длина световой волны монохроматического света. После изучения спектральных линий ряда элементов было найдено, что наибольшую точность воспроизведения единицы длины обеспечивает оранжевая линия изотопа криптона-86. XI Генеральная конференция по мерам и весам в 1960 году приняла выражение размера метра в длинах этих волн как наиболее точное его значение. На основе этого решения утверждено следующее определение: метр- длина, равная 1650763,73 длины между уровнями 2p10 и 5d5 атома криптона-86.

Значит ли это, что эталон- стержень потерял свое значение, или изменил свой размер? Нет, его размер не изменился, и точность измерений он обеспечивает ту же, но потерял свое первенство. Теперь первичным эталоном стала длина волны оранжевой линии спектра криптона, точнее, длина 1650763,73 этих волн. Кроме повышения точности измерения (там, где это необходимо), новый первичный эталон дает возможность следить за постоянством платино- иридиевого эталона, ставшего теперь вторичным эталоном.

5. История измерения времени.

Призрачно все в этом мире бушующем.

Есть только миг, - за него и держись.

Есть только миг между прошлым и будущим,

Именно он называется жизнь.   Леонид Дербенев

Пространство и время - это философские категории

Время наряду с пространством составляет сущность нашего мира, образует арену деятельности людей, является основным предметом их познания. С осознанием понятия времени связаны осознание безвозвратности прошлого, мимолетности настоящего, непознаваемости будущего.

Человек не может двигаться по шкале времени - от прошлого к будущему, и от будущего к прошлому. Он только живет в своем времени. Стрела времени направлена только от прошлого к будущему. Машины времени не существует. Человек не может освободиться от времени или управлять им. Он только научился "останавливать мгновенье" с помощью книг, граммофонных и магнитных записей звука, фотографии, кино и видеозаписей. Но он не может жить, действовать, развиваться без ориентации во времени, без синхронизации своего поведения с изменениями окружающей среды, с поведением других людей и иных объектов.

Природа, создавшая человека, снабдила его и другие живые организмы специальным биологическим механизмом для ориентировочной интуитивной оценки времени -

биологическими часами - способностью животного и человека ориентироваться во времени. Она основана на строгой периодичности физико-химических и физиологических процессов в клетках - биологических ритмах, циклических колебаниях интенсивности и характера биологических процессов и явлений.

Понятие о течении времени подсказала древнему человеку периодическая смена дня и ночи, времен года. События текущей жизни потребовали измерять время.

Летосчисление (или календарь) - это система исчисления больших промежутков времени. Во многих системах летосчисления счет велся от какого-либо исторического или легендарного события.

Каждый народ использовал свои способы датировки исторических событий. Одни вели отсчет лет от предполагаемого сотворения мира: так евреи датировали его 3761 до н. э., александрийская хронология считала этой датой 25 мая 5493 до н. э. Римляне начинали отсчет от легендарного основания Рима (753 до н. э.). Парфяне вели отсчет лет от вступления на трон первого царя,

египтяне - с начала правления каждой следующей династии. Каждая мировая религия основывала свой календарь.

Христианская церковь приурочила начало летосчисления к рождению Иисуса Христа. Эта система летосчисления (новая эра) принята в настоящее время в большинстве стран. У народов, исповедующих ислам, летосчисление ведется от 622 н. э. (от даты переселения Мухаммеда - основателя ислама - в Медину).

Никто точно не знает, почему год делится на 12 месяцев (такое деление не соответствует ни лунному, ни солнечному календарю). Считается, что деление часа на 60 минут связано с вавилонской системой счисления, в основе которой было не 10, а 60.

Деление месяца на семидневные недели, возникшее на Древнем Востоке, в I веке до н. э. стало употребляться в Риме, откуда позднее распространилось по всей Европе.

В заимствованной римлянами семидневной неделе только один день имел особое название - "суббота" (др. евр. sabbath - отдых, покой), остальные дни назывались порядковыми номерами в неделе: первый, второй и т.д.; ср. в русском понедельник, вторник и т. д., где "неделя" означала первоначально нерабочий день (от "не делать"). Римляне назвали дни недели по семи светилам, носившим имена богов. Названия следующие: суббота - день Сатурна, дальше - день Солнца, Луны, Марса, Меркурия, Юпитера, Венеры.

Несовершенство естественных биологических часов заставило человека придумывать и создавать искусственные устройства, более эффективно выполняющие функции измерения времени в течение суток, дней, недель, месяцев, лет - часы.

Часы являются сегодня самым массовым измерительным прибором.

Важнейшим и самым распространенным простейшим прибором измерения времени были солнечные часы. В солнечных часах использовался постоянный периодический процесс вращения Земли. Но солнечные часы работали только днем и только в ясную погоду, когда светит солнце, да и то недостаточно точно

Водяные часы, огненные часы - свечи с нанесенными на них делениями, и песочные часы могли работать в любое время суток и в любую погоду. Они обеспечивали точность измерения времени уже плюс/минус 15-20 мин. Клепсидра - древнейшие часы.

В качестве так называемых "огненных" часов использовались свечи, на которые равномерно наносились метки. Расстояние между метками служило единицей времени.

Надежные часы были необходимы прежде всего церкви - для уточнения времени богослужения. Сначала с этой задачей более или менее успешно справлялись солнечные часы, со временем их заменили башенные часы с боем.

Следующий этап в измерении времени - изобретение механических - башенных колесных часов. В середине XIV в городах Европы строили городские колокольни с часами. Ее колокола отбивали церковные часы, время коммерческих сделок и работы ремесленников. Время необходимо было знать и в мануфактурах, где результат работы зависел от точного соблюдения продолжительности отдельных технологических процессов

Механические колесные часы надежно работали только на суше, для морских путешествий они не были приспособлены.

В 1657 году голландский ученый Христиан Гюйгенс изготовил механические часы с маятником. Точность часов значительно возросла, но перевозить такие часы все равно было нельзя. В 1670 году был изобретен анкерный спуск, обеспечивавший равномерный ход часового механизма.

Компактные переносные механические хронометры стало возможным изготовлять после изобретения Гюйгенсом в 1675 году вращательного балансира и использования пружины вместо гирь. Сочетание крутильного маятника, спиральной пружины и анкерного спуска открыло дорогу созданию массовых малогабаритных часов, морских хронометров и значительно повысило точность астрономических наблюдений.

Точные часы - хронометры были необходимы для морской навигации. Их изготовил в 1735 году англичанин Джон Харрисон. Их точность была плюс/минус 5 секунд в сутки, и они уже были вполне пригодны для морских путешествий.

В начале XIX века с проблемой хранения времени столкнулись почтовые службы, пытавшиеся обеспечить движение почтовых экипажей по расписанию. В результате они обзавелись часами, которые можно было возить с собой. А с появлением железных дорог часы получили и кондукторы поездов. Чем активнее развивалось трансатлантическое сообщение, тем важнее требовалось обеспечить единство отсчета времени по разные стороны океана. В этой ситуации механические часы уже не годились. И тут на помощь пришло электричество. Электрические часы решили проблему синхронизации на больших расстояниях - сначала на материках, а потом и между ними. В 1851 году кабель был проложен по дну Ла-Манша, в 1860-м - Средиземного моря, а в 1865-м - Атлантического океана. А с 1899 года началась передача сигналов точного времени по радио.

Электрические часы изобрел в 1847 году англичанин Александр Бэйн.

В 1918 году были впервые построены первые кварцевые часы.

В 1972 году появились первые в мире электронные часы с жидкокристаллическим дисплеем.

В 1949-м были построены первые атомные часы, где в качестве источника колебаний выступил не маятник и не кварцевый генератор, а сигналы, связанные с квантовым переходом электрона между двумя энергетическими уровнями атома. Эта электромагнитная волна, то есть фотон радиоизлучения, характеризуется очень высокой стабильностью энергии и частоты колебаний. В 1955-м появились первые атомные часы на основе атомов цезия, используются атомы водорода и рубидия.

Со времени изобретения атомных часов их точность повышалась в среднем вдвое каждые 2 года. Этот процесс продолжается и сегодня.

В 1967 году перешли на атомный эталон времени.

Многие люди отмечают, что с возрастом время течет быстрее. Но, то же самое, говорят и достаточно молодые люди.

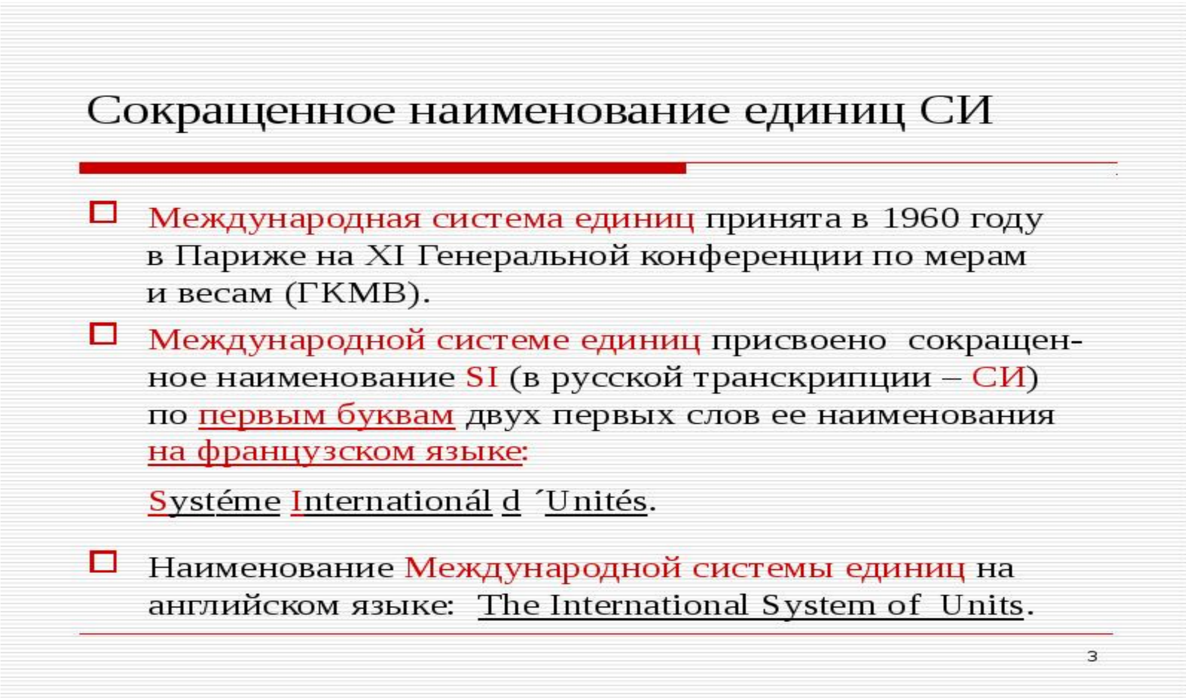
Вопрос к обучаемым: "Как вы это можете объяснить?"

Конечно, это можно объяснить постоянно ускоряющимся темпом жизни. Поезда и самолеты все быстрее доставляют нас в другие города, страны и континенты. Средства массовой информации обрушивают на наши бедные головы все возрастающий поток информации. Благодаря радио, телевидению и Интернету мы узнаем о событии практически сразу, после того как оно произошло. Но швейцарские ученые находят кажущемуся ускорению времени и другое объяснение. Они считают, что с возрастом биологические часы человека начинают "отставать". И поэтому ему кажется, что события вокруг него бегут быстрее. По аналогии, постарайтесь идти по подземному переходу в метро медленнее темпа движения толпы вокруг вас. И вы сразу заметите, что вас со всех сторон обгоняют люди. Так и время обгоняет нас.

6. Система СИ.

В 1960 XI Генеральная конференция по мерам и весам приняла единую Международную систему единиц (СИ), дала определение основных единиц этой системы и предписала употребление некоторых производных единиц, "не предрешая вопроса о других, которые могут быть добавлены в будущем". Тем самым впервые в истории международным соглашением была принята международная когерентная система единиц. В настоящее время она принята в качестве законной системы единиц измерения большинством стран мира.

Международная система единиц (СИ) представляет собой согласованную систему, в которой для любой физической величины, такой, как длина, время или сила, предусматривается одна и только одна единица измерения. Некоторым из единиц даны особые названия, примером может служить единица давления паскаль, тогда как названия других образуются из названий тех единиц, от которых они произведены, например единица скорости - метр в секунду. Из всех производных механических единиц наиболее важное значение имеют единица силы ньютон, единица энергии джоуль и единица мощности ватт. Ньютон определяется как сила, которая придает массе в один килограмм ускорение, равное одному метру за секунду в квадрате. Джоуль равен работе, которая совершается, когда точка приложения силы, равной одному ньютону, перемещается на расстояние один метр в направлении действия силы. Ватт - это мощность, при которой работа в один джоуль совершается за одну секунду.



Основные достоинства единиц СИ

- Универсальность – охват всех областей науки, техники и производства.
- Унификация единиц физических величин для всех видов измерений механических, тепловых, электрических, магнитных, акустических, световых и других величин.
- Удобные по размеру для практического применения основные и производные единицы.
- Когерентность (согласованность, связанность) системы: все производные единицы системы получают из уравнений связи между величинами, в которых коэффициенты равны безразмерной величине.

Область применения единиц СИ

- В Западной Европе переход на СИ завершен в 1978 г.
- В СССР единицы СИ введены с 1-го января 1981 года государственным стандартом ГОСТ 8.417-81 Метрология. Единицы физических величин.
- В России с 01.09.2003 действует актуализированная версия единиц СИ, утвержденная межгосударственным стандартом ГОСТ 8.417-2002 Единицы величин.
- В настоящее время практически все страны мира перешли на систему СИ.

Правила написания единиц СИ

- В документации допускается применять либо международные либо русские обозначения. Одновременное применение обоих видов обозначений в одном документе не допускается.
- При указании значений величин на щитках или шкалах, помещаемых на изделиях, следует использовать только международные обозначения единиц.
- В обозначениях единиц точка как знак сокращения не ставится.
- Обозначения единиц следует указывать сразу после числовых значений величин и помещать в строку с ними (без переноса на следующую строку).

Правила написания единиц СИ

- Между последней цифрой числа и обозначением единицы следует оставлять пробел (без переноса на следующую строку):

Правильно:	Неправильно:
100 кВт; 100 Ом; 80 %	100кВт; 100Ом; 80%

- Обозначение единиц с их предельными отклонениями следует указывать после скобки, где они помещены, или указывать обозначение после числового обозначения величины и после ее предельного отклонения, например:

Правильно:	Неправильно:
(100,0 ± 0,1) кг; 50 г ± 1 г;	100,0 ± 0,1 кг; 50 ± 1 г

Правила написания единиц СИ

- Наименования единиц в заголовках граф и наименованиях строк таблиц указывают после запятой без предлога «в», например: « Мощность, кВт».
- Расшифровка символов, входящих в формулу, приводится слева направо и сверху вниз в той последовательности, в которой символы расположены в формуле, после предлога «где» без двоеточия после него, например:

$$V = 3{,}6\, S/T, \qquad (1)$$

где V - скорость, км/ч;
S - путь, км;
T - время, ч.

Основные единицы СИ

Наименование величины	Наименование	Обозначение	
		международное	русское
Длина	метр	m	м
Масса	килограмм	kg	кг
Время	секунда	s	с
Сила электрического тока	ампер	A	А
Термодинамическая температура	кельвин	K	К
Количество вещества	моль	mol	моль
Сила света	кандела	cd	кд

Правила написания единиц СИ

- К обозначениям единиц и к их наименованиям нельзя добавлять буквы и слова, указывающие на физическую величину или на объект, например, пм - погонный метр, % весовой и т.д. Во всех таких случаях определяющие слова следует присоединять к наименованию величины, а единицу указывать по ГОСТу. Например, погонная длина 5 м, массовая доля 10 % и т.д.
- Обозначения единиц, совпадающие с наименованиями этих единиц, по падежам и числам изменять нельзя, если они помещены после числовых значений, а также в таблицах, при расшифровке формул, в выводах. К таким обозначениям относятся: бар, бэр, вар, моль, рад, ньютон, кельвин, фарад, ом, люкс, паскаль, герц и др.

Производные единицы СИ

- Производные единицы могут быть двух типов:
  - которые образованы с использованием основных единиц (например, площадь – м^2, объем – м^3, скорость – м/с);
  - имеющие специальные наименования (как правило, образованные по именам ученых) и обозначения.
- Русские и международные обозначения производных единиц, имеющих специальные наименования и обозначения: Hz, Гц – герц (частота); N, H – ньютон (сила, вес); Pa, Па – паскаль (давление); rad, рад – радиан (плоский угол); sr, ср – стерадиан (телесный угол); W, Вт – ватт (мощность); C, Кл – кулон (количество электричества); °C – градус Цельсия (температура);

Производные единицы СИ

- V, В – вольт (электрическое напряжение, потенциал); F, Ф – фарад (электрическая емкость); Ω, Ом – ом (электрическое сопротивление); S, См – сименс (электрическая проводимость); Wb, Вб – вебер (поток магнитной индукции); T, Тл – тесла (плотность магнитного потока); H, Гн – генри (индуктивность); lm, лм – люмен (световой поток); lx, лк – освещенность); Bq, Бк - беккерель (активность нуклида в радиоактивном источнике); Gy, Гр – грей, керма (поглощенная доза ионизирующего излучения); Sv, Зв – зиверт (эквивалентная доза ионизирующего излучения); kat, кат –катал (активность катализатора).

Внесистемные единицы, допускаемые к применению наравне с единицами СИ

Наименование		Обозначение	
величины	единицы	международное	русское
Масса	тонна	t	т
Время	минута	min	мин
	час	h	ч
	сутки	d	сут
	год	y.	г.
Плоский угол	градус, минута, секунда	° ´ ´´	° ´ ´´
Объем, вместимость	литр	L, l	л

Внесистемные единицы, допускаемые к применению в специальных областях

Наименование		Обозначение		Область применения
величины	единицы	межд.	русское	
Оптическая сила	диоптрия	-	дптр	В оптике (0,1 м)
Площадь	гектар	ha	га	В сельском и лесном хозяйстве
Плоский угол	град (гон)	gon	град	В геодезии (π/200)
Энергия	электрон-вольт	eV	эВ	В физике
Полная мощность	вольт-ампер	V·A	В·А	В электротехнике
Реактивная мощность	вар	var	вар	В электротехнике

Единицы, временно допускаемые к применению в специальных областях

Наименование		Обозначение		Примечание
величины	единицы	межд.	русское	
Длина	морская миля	n.mile	миля	В навигации (1852 м)
Масса	карат	–	кар	0,2 г
	центнер	q	ц	В сельском хозяйстве (100 кг)
Линейная плотность	текс	tex	текс	В текстильной промышленности (10^{-6} кг/м)
Телесный угол	квадратный градус	€·	€·	$3{,}0462 \cdot 10^{-4}$ ср

Единицы, временно допускаемые к применению в специальных областях

Наименование		Обозначение		Примечание
величины	единицы	межд.	русское	
Скорость	узел	kn	уз	0,514(4) м/с
Ускорение	гал	Gal	Гал	0,01 м/с^2
Частота вращения	оборот в секунду	r/s	об/с	
	оборот в минуту	r/min	об/мин	
Давление	торр	Torr	-	133,322 Па
	бар	bar	бар	10^5 Па
Натуральный логарифм безразмерного отношения физич. величин	непер	Np	$Н_п$	1 $Н_п$ = 0,8686… Б

Относительные и логарифмические единицы

Относительные единицы:

- - сотая доля – процент, %;
  - тысячная доля – промилле, ‰;
  - миллионная доля - млн.$^{-1}$, ppm.
- Логарифмические единицы:

  - бел (B, Б) – уровень звукового давления;
  - децибел (dB, дБ);
  - октава (окт) – частотный интервал;
  - декада (дек) – частотный интервал;
  - фон (phone, фон) – уровень громкости.

Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц

Множитель	Приставка	Обозначение	
		международное	русское
10^{24}	иотта	Y	И
10^{21}	зетта	Z	З
10^{18}	экса	E	Э
10^{15}	пета	P	П
10^{12}	тера	T	Т
10^{9}	гига	G	Г
10^{6}	мега	M	М
10^{3}	кило	k	к

Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц

Множитель	Приставка	Обозначение	
		международное	русское
10^{2}	гекто	h	г
10^{1}	дека	da	да
10^{-1}	деци	d	д
10^{-2}	санти	c	с
10^{-3}	милли	m	м
10^{-6}	микро	μ	мк
10^{-9}	нано	n	н
10^{-12}	пико	p	п

Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц

Множитель	Приставка	Обозначение	
		международное	русское
10^{-15}	фемто	f	ф
10^{-18}	атто	a	а
10^{-21}	зепто	z	з
10^{-24}	иокто	y	и

Соотношения единиц СИ с внесистемными единицами

1 кгс = 9,80665 Н

1 кгс/см^2 = 98066,5 Па ≈ 0,1 МПа

1 кгс/мм^2 = 9,80665·10^6 ≈ 10 МПа

1 мм рт. ст. = 133,322 Па

760 мм рт. ст. = 1013,25 гПа или 1013,25 гектопаскаль

1 мм вод. ст. = 9,80665 Па

Соотношения единиц СИ с внесистемными единицами

1 л.с. = 735, 499 Вт
1 кВт = 1,36 л.с.
1 кал = 4,1868 Дж
1 сСт = 1 мм^2/с

Стокс (Ст) - прежняя единица кинематической вязкости.
Сантистокс (сСт) – обычно применяемое ранее на практике обозначение кинематической вязкости.

1 П = 0,1 Па·с (динамическая вязкость)

Пуаз (П) - прежняя единица динамической вязкости.
Сантипуаз (сП) – обычно применяемое ранее на практике обозначение динамической вязкости.

Соотношения единиц СИ с внесистемными единицами

Дюйм (in) = 25,4 мм
Фут (ft) = 0,3048 м
Ярд (yd) = 0,9144 м
1 кв. дюйм = 645,16 мм^2 ≈ 645 мм^2
Галлон жидкостный (США) - gal liq (US) ≈ 3,79 л
Галлон жидкостный (Англия) -gal liq (UK) ≈ 4,55 л
Нефтяной баррель (bbl) = 158,987 л
Миля сухопутная = 1609,34 м
Пинта жидкая (США) - liq pt (US) = 0,473 л
Пинта жидкая (Англия) - liq pt (UK) = 0,568 л

Соотношения единиц СИ с внесистемными единицами

Унция торговая (oz) = 28,3495 г
Унция тройская (oz tr) = 31,1035 г
Унция аптекарская (oz ap) = 31,1035 г
Унция жидкая (fl oz) = 29,5737 см^3
Фунт торговый (lb) = 0,45359 кг
Тонна регистровая (tn reg) = 2,83168 м^3
Тонна короткая (sh tn) ≈ 907,2 кг (2000 фунтов)
Тонна длинная (tn) ≈ 1016 кг (2240 фунтов)
Центнер короткий (sh cwt) ≈ 45,36 кг
Центнер длинный (cwt) ≈ 50,8 кг
Фунт-силы на квадратный дюйм (psi) = 6,89476 кПа
Фунт-сила (lbf) = 4,44822 Н

Соотношения единиц СИ с внесистемными единицами

Фунт-силы на куб.дюйм (lbf/in^3) = 271,447 кН/м^3
Фунт-силы на куб.фут (lbf/ft^3) = 271,447 кН/м^3

Пересчет градусов Фаренгейта (ºF) в градусы Цельсия (ºC):

1 ºF = 5/9 ºC; t ºC = [5(ºF – 32)]/9

Характерные точки температурной шкалы Фаренгейта:
0 ºF –температура смеси льда, соли и нашатыря;
32 ºF = 0 ºC;
96 ºF - нормальная температура человеческого тела (36,7 ºC);
212 ºF = 100 ºC.

Вопросы для самопроверки

1. Расскажите о необходимости создания единиц измерения (единицы физической величины).

2. Когда и где были созданы первые системы единиц физических величин?

3. Когда и где была создана международная система единиц?

4. Какие единицы первыми были включены в международную систему единиц?

<u>Тема</u> : Арифметический корень натуральной степени

<u>Тип урока</u>: изучение нового материала.

<u>Цели урока</u>: <u>дидактическая:</u> обобщение знаний о корнях и арифметических корнях, полученных в основной школе; познакомить со свойствами арифметического корня; подготовить к изучению понятия степени с действительным показателем; научить применять полученные знания при решении заданий , стимулировать учащихся к овладению приемами, которые будут полезны в дальнейшем, в частности при решении уравнений;

<u>развивающая</u>: развивать логическое мышление, память, продолжать формирование математической речи, вырабатывать умение анализировать и сравнивать;

<u>воспитательная</u>: приучать к эстетическому оформлению записи в тетради, умению выслушать других и умению общаться, прививать трудолюбие и аккуратность, создать условия для воспитания интереса к изучаемой теме, положительного отношения к знаниям, воспитание дисциплинированности

<u>Оборудование :</u> презентация, компьютер, проектор

Ход занятия:

1. **Организационный момент**
2. **Актуализация знаний учащихся**

- проверка домашнего задания (вопросы учащихся)

- фронтальная работа с классом: решить уравнения 3 x^4 + 2 = 0

- <u>Устная работа</u>

1.Возвести в квадрат числа:0; 7; - $\frac{3}{8}$; 1 $\frac{2}{3}$;0,2;0,6;-1,1;0,08.

2. Представить в виде квадрата числа: 1; $\frac{49}{16}$; 0,0001; 42^4 ; $1{,}5^6$.

3. Представить в виде куба числа: $\frac{8}{27}$ -0,001; $(-2)^6$; $(-2)^9$; -2^3 .

1. **Изучение нового материала (презентация)**

Перейдем к изучению корней степени п для произвольного натурального числа $n \geqslant$

Определение:

Пусть $n \geqslant 2$ a называется такое число t, n-я степень которого равна a.

Таким образом, утверждение «t **— корень n-й степени из a**» означает, что $t^n = a$.

Корень 3-й степени называется также **кубическим**.

Например, кубический корень из числа 125 — это число 5, так как $5^3 = 125$. Кубический корень из числа -125 — это число -5, так как $(-5)^3 = -125$.

Корень 7-й степени из числа 128 — это число 2, так как $2^7 = 128$. Корень 7-й степени из числа -128 — это число -2, так как $(-2)^7 = -128$. Корень 7-й степени из числа 0 — это 0, так как $0^7 = 0$.

Во множестве действительных чисел существует единственный корень нечетной степени п из любого числа a. Этот корень обозначается $\sqrt[n]{a}$

Например, $\sqrt[3]{125} = 5, \quad \sqrt[7]{-128} = -2, \quad \sqrt[7]{0} = 0$.

Утверждение о существовании корня нечетной степени из любого числа мы принимаем без доказательства. Согласно определению, когда п нечетное, то при любом значении а верно равенство $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

Например, $\left(\sqrt[7]{92}\right)^7 = 92, \quad \left(\sqrt[7]{123}\right)^7 = 123, \quad \left(\sqrt[7]{-123}\right)^7 = -123.$

Заметим, что 0 — это единственное число, n-я степень которого равна 0. Поэтому при любом натуральном $n \geqslant 2$ существует единственный корень n-й степени из 0 — это число 0, т. е. $\sqrt[n]{0} = 0$.

Утверждение о существовании корня четной степени из любого положительного числа мы принимаем без доказательства. Согласно определению, когда n четное, то при любом положительном, значении а верно равенство $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$

Например, $\left(\sqrt[4]{51}\right)^4 = 51, \quad \left(\sqrt[4]{87}\right)^4 = 87$.

Не существует такого числа, 4-я степень которого равна -81. Поэтому корня 4-й степени из числа -81 не существует. И вообще, поскольку не существует такого числа, четная степень которого была бы отрицательной, то не существует корня четной степени из отрицательного числа.

<u>Определение:</u>

Неотрицательный корень n-й степени из числа a называется арифметическим корнем n-й степени из a.

При четном n символом $\sqrt[n]{a}$ обозначается только арифметический корень n-й степени из числа a (при чтении записи $\sqrt[n]{a}$ слово «арифметический» обычно пропускают).

Выражение, стоящее под знаком корня, называется **подкоренным выражением.**

Извлечь корень n-й степени из числа a — это значит найти значение выражения $\sqrt[n]{a}$.

Так как корня четной степени из отрицательного числа не существует, то выражение $\sqrt[n]{a}$. при четном n и отрицательном a не имеет смысла.

Например, не имеют смысла выражения $\sqrt[4]{-81}$ и $\sqrt[6]{-64}$.

Как мы установили, при любом значении a, при котором выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл, верно равенство

$(\sqrt[n]{a})^n = a.$ (1) Поэтому равенство (1) является тождеством.

В конце XV в. бакалавр Парижского университета Н. Шюке внес усовершенствования в алгебраическую символику. В частности, знаком корня служил символ R_x (от латинского слова radix — корень). Так, выражение $\sqrt[4]{24+\sqrt{37}}$ в символике Шюке имело вид $\bar{R}_x^4\,24\,\bar{p}\bar{R}_x^2\,37.$

Знак корня $\sqrt{\ }$ в современном виде был предложен в 1525 г. чешским математиком К. Рудольфом. Его учебник алгебры переиздавался до 1615 г., и по нему учился знаменитый математик Л. Эйлер.

Знак $\sqrt{\ }$ еще называют **радикалом**.

Например, корнем 5-й степени из числа 32 является 2, потому что $2^5=32$. Корнем 4-й степени из числа 81 является 3 и -3, потому что $3^4=81$ и $(-3)^4=81$.

Если n нечетное число, то для любого числа a существует единственное действительное число, n-я степень которого равна a.

Если n четное число, то при $a > 0$ существуют два действительных числа, n-я степень которых равна a. Эти числа являются взаимно противоположными.

Если n четное число, при $a < 0$ a не имеет действительного корня.

Корень нечетной степени из отрицательного числа можно выразить через арифметический корень той же степени. Например, $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8} = -2$

Если $a = 0$, то $\sqrt[n]{0} = 0$.

Пример 1: $\sqrt[3]{x^3} = x$ $\sqrt[4]{x^4} = |x|$ $\sqrt[5]{x^5} = x$ $\sqrt[6]{x^6} = |x|$

Если $a > b > 0$, то $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ **Пример 2:** $\sqrt[3]{7} > \sqrt[3]{4}$; $\sqrt[4]{8} > \sqrt[4]{5}$

Примеры:

1. *Уравнение с нечетной степенью* $x^3 = 27$ *имеет единственный действительный корень:* $x = \sqrt[3]{27} = 3$
2. *Уравнение* $x^4 = -81$ *не имеет действительных корней, т.к. степень с четным показателем не равна отрицательному числу.*
3. *Уравнение* $x^4 = 16$ *имеет два действительных корня:* $x = \pm\sqrt[4]{16}$, $x = \pm 2$

упростите; $\left(\sqrt[5]{2}\right)^4 = \sqrt[5]{2^4} = \sqrt[5]{16}$, $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[12]{2}$, $\sqrt{\sqrt[3]{x^4}} = \sqrt[6]{x^4} = \sqrt[3]{x^2}$

вычислить: $\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}} = \dfrac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}} = \dfrac{2}{3}$

Итог: Свойства корня натуральной степени

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}; \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0);$$

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}; \qquad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[kn]{a};$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}; \qquad (\sqrt[n]{a^n}) = a \quad (a \geq 0);$$

$$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b},\ \text{если}\ 0 \leq a \leq b; \qquad \sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, \text{при}\, a \geq 0 \\ -a, \text{при}\, a < 0 \end{cases}$$

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|; \qquad \sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a} \quad (a \geq 0).$$

4Домашнее задание:

Пример: Вычислите значение выражения

1. $\sqrt[3]{54}\cdot\sqrt[3]{32}$

$$\sqrt[3]{54}\cdot\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{54\cdot 32} = \sqrt[3]{27\cdot 2\cdot 32} = \sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{64} = 3\cdot 4 = 12$$

2. **Вынести множитель из-под знака радикала:**

a) $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27\cdot 2} = \sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt[3]{a^5b^6} = \sqrt[3]{a^3b^6a^2} = \sqrt[3]{a^3}\cdot\sqrt[3]{b^6}\cdot\sqrt[3]{a^2} = ab^2\sqrt[3]{a^2}$

c) $\sqrt[4]{48a^6} = \sqrt[4]{16\cdot 3\cdot a^4\cdot a^2} = \sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{a^4}\cdot\sqrt[4]{3a^2} = 2|a|\sqrt[4]{3a^2}$

4. Решить уравнение:

$$x^{12} - 63x^6 - 64 = 0.$$

ТЕМА: Степень с рациональным и действительным показателем.

<u>**Тип занятия**:</u> изучение нового материала

<u>**Цели**</u> : <u>дидактическая:</u> обобщение знаний о корнях и арифметических корнях, полученных в основной школе; подготовить к изучению понятия степени с действительным показателем; научить применять полученные знания при решении заданий, стимулировать учащихся к овладению приемами, которые будут полезны в дальнейшем, в частности при решении уравнений;

развивающая: развивать логическое мышление, память, продолжать формирование математической речи, вырабатывать умение анализировать и сравнивать;

воспитательная: приучать к эстетическому оформлению записи в тетради, умению выслушать других и умению общаться, прививать трудолюбие и аккуратность, создать условия для воспитания интереса к изучаемой теме, положительного отношения к знаниям, воспитание дисциплинированности

Перечень вопросов, рассматриваемых в теме

1) понятие степени;

2) определение степени с рациональным и действительным показателем;

3) нахождения значения степени с действительным показателем.

Повторение изученного материала:

Степенью называется выражение вида: a^c, где:

- a – основание степени;
- c – показатель степени.

Степень с натуральным показателем {1, 2, 3,...}

Определяем понятие степени, показатель которой – натуральное число (т.е. целое и положительное).

1. По определению: $a^1 = a$.
2. Возвести число в квадрат – значит умножить его само на себя: $a^2 = a \cdot a$
3. Возвести число в куб – значит умножить его само на себя три раза: $a^3 = a \cdot a \cdot a$.

Возвести число в натуральную степень n – значит умножить число само на себя n раз:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}.$$

Степень с целым показателем {0, ±1, ±2,...}

Если показателем степени является **целое положительное** число:

$a^n = a^n$, **n > 0**

Возведение в **нулевую степень**:

$a^0 = 1$, **a ≠ 0**

Если показателем степени является **целое отрицательное** число:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$, **a ≠ 0**

Прим: выражение 0^n не определено, в случае **n ≤ 0**. Если **n > 0**, то $0^n = 0$

Пример 1.

Корень n-ой степени

Корень n-й степени из числа a – это число, n-я степень которого равна a.

Если n – чётно.

- Тогда, если **a** < **0** корень **n**-ой степени из **a** не определен.
- Или если **a** ≥ **0**, то неотрицательный корень уравнения $x^n = a$ называется арифметическим корнем **n**-ой степени из **a** и обозначается $\sqrt[n]{a}$

Если n – нечётно.

- Тогда уравнение $x^n = a$ имеет единственный корень при любом a.

Пример 4.

$$\sqrt[4]{10000} = 10,\ \sqrt[5]{-243} = -3,\ \sqrt[6]{64} = 2.$$

$$5^{-1} = \frac{1}{5},\quad \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{9}{4}$$

Степень с рациональным показателем

Если n- натуральное число, $n \geq 2$, *m*- целое число и частное $\frac{m}{n}$ является целым числом, то при $a > 0$ справедливо равенство:

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

При любом действительном x $(x \in R)$ и любом положительном a $(a > 0)$ степень a^x является положительным числом:

$a^x > 0$ при $x \in R, a > 0.$

Но если основание степени a=0, то степень 0^xопределяют только при $x > 0$, и считают, что $0^x = 0$ при $x > 0.$

При $x \leq 0$ выражение 0^x не имеет смысла.

Напомним, что r-рациональное число вида $\frac{m}{n}$, где *m*- целое число , n- натуральное число. Тогда по нашей формуле получим:

$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$

Таким образом, степень определена для любого рационального показателя r и любого положительного основания a.

Если $r = \frac{m}{n} > 0$, то выражение $\sqrt[n]{a^m}$ имеет смысл не только при $a >$0, но и при a=0, причем, $\sqrt[n]{0^m} = 0.$ Поэтому считают, что при r>0 выполняется равенство $0^r = 0.$

Пользуясь формулой $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ степень с рациональным показателем можно представить в виде корня и наоборот.

Пример: вычислим $\sqrt[5]{4^{15}}$

Мы можем представить $4^{15} = (4^3)^5$, тогда

$\sqrt[5]{4^{15}} = \sqrt[5]{(4^3)^5} = 4^3 = 64$

Таким образом, мы можем записать

$\sqrt[5]{4^{15}} = 64 = 4^3$ или $\sqrt[5]{4^{15}} = 4^{\frac{15}{5}}$, т.к. $3 = \frac{15}{5}$

Рассмотрим несколько примеров:

1. $32^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{32^3} = \sqrt[5]{2^{15}} = 2^3 = 8;$
2. $64^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{64^{-2}} = \sqrt[3]{4^{-6}} = \sqrt[3]{(4^{-2})^3} = 4^{-2} = \frac{1}{16}$

Отметим, что все свойства степени с натуральным показателем, которые мы с вами повторили, верны для степени с любым рациональным показателем и положительным основанием, а именно, для любых рациональных чисел p и q и любых $a >0$ и $b >0$ ы следующие равенства:

1. $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$;
2. $a^p : a^q = a^{p-q}$;
3. $(a^p)^q = a^{pq}$;
4. $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$;
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p} \quad b \neq 0$

Разберем несколько примеров, воспользовавшись данными свойствами:

1. Вычислим: $9^{\frac{1}{3}} \cdot 81^{\frac{1}{3}}$

$(9 \cdot 81)^{\frac{1}{3}} = (3^2 \cdot 3^4)^{\frac{1}{3}} = (3^6)^{\frac{1}{3}} = 3^2 = 9.$

1. Упростить выражение: $\frac{a^{\frac{5}{4}}b - ab^{\frac{5}{4}}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}}$

В числителе вынесем общий множитель ab за скобки, в знаменателе представим корни в виде дробных показателей степени:

$\frac{ab(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}})}{a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}} = ab.$

$$\frac{\sqrt[9]{7}\cdot\sqrt[18]{7}}{\sqrt[6]{7}}=\frac{7^{\frac{1}{9}}\cdot 7^{\frac{1}{18}}}{7^{\frac{1}{6}}}=7^{\frac{1}{9}+\frac{1}{18}-\frac{1}{6}}=7^0=1.$$

Примеры.

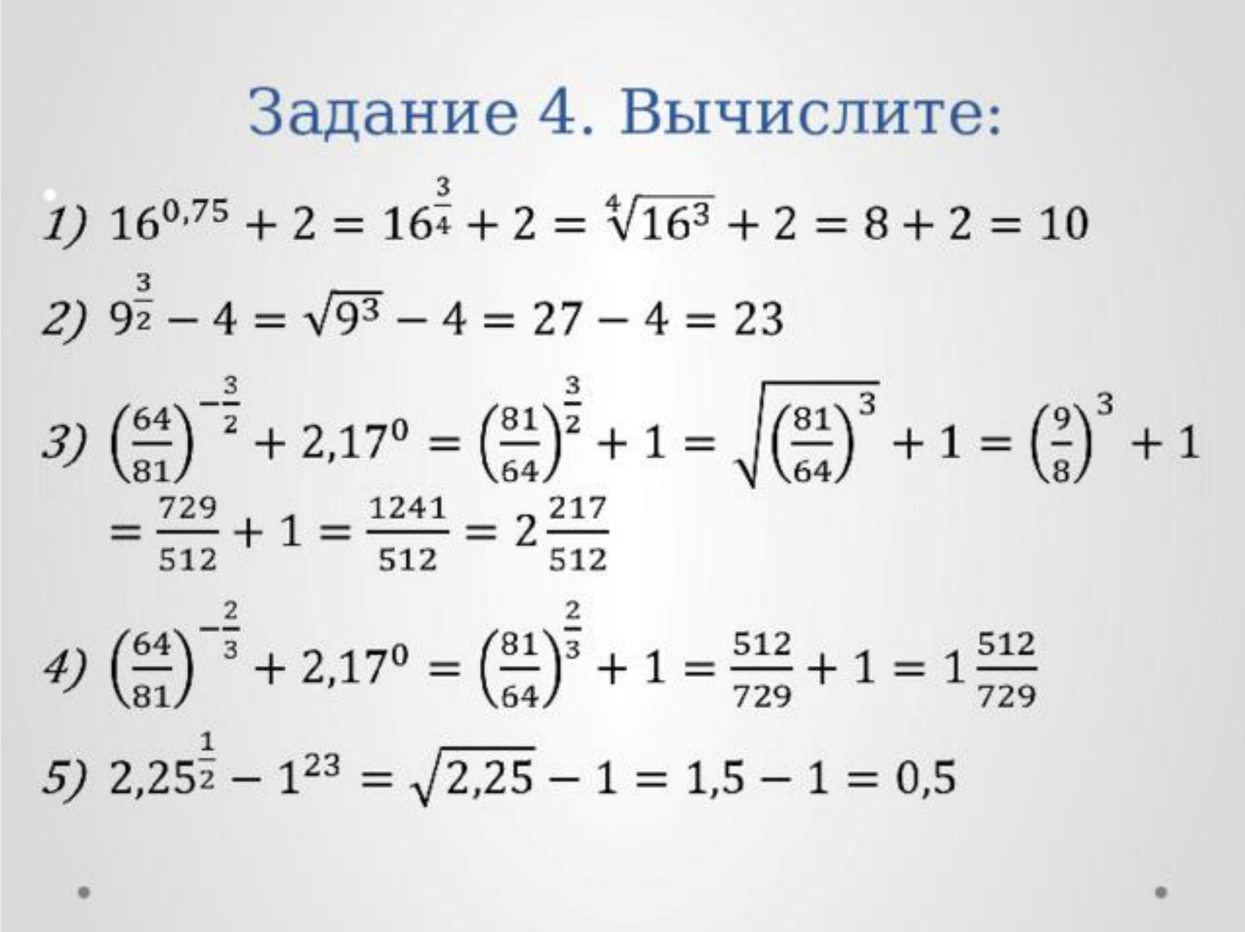
1. Соотнесите выражения с их значениями

А. $\left(\frac{2}{3}\right)^2$; **Б.** $\left(-\frac{4}{9}\right)^{-1}$; **В.** $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$.

1) $\frac{4}{9}$ **2)** $\frac{9}{4}$ **3)** $-\frac{9}{4}$

Таблица корней

Корень третьей степени (3)	$\sqrt[3]{8}=2$ $\sqrt[3]{27}=3$ $\sqrt[3]{64}=4$ $\sqrt[3]{125}=5$	Корень седьмой степени (7)	$\sqrt[7]{128}=2$ $\sqrt[7]{2187}=3$ $\sqrt[7]{16384}=4$ $\sqrt[7]{78125}=5$
Корень четвертой степени (4)	$\sqrt[4]{16}=2$ $\sqrt[4]{81}=3$ $\sqrt[4]{256}=4$ $\sqrt[4]{625}=5$	Корень восьмой степени (8)	$\sqrt[8]{256}=2$ $\sqrt[8]{6561}=3$ $\sqrt[8]{65536}=4$ $\sqrt[8]{390625}=5$
Корень пятой степени (5)	$\sqrt[5]{32}=2$ $\sqrt[5]{243}=3$ $\sqrt[5]{1024}=4$ $\sqrt[5]{3125}=5$	Корень девятой степени (9)	$\sqrt[9]{512}=2$ $\sqrt[9]{19683}=3$ $\sqrt[9]{262144}=4$ $\sqrt[9]{1953125}=5$
Корень шестой степени (6)	$\sqrt[6]{64}=2$ $\sqrt[6]{729}=3$ $\sqrt[6]{4096}=4$ $\sqrt[6]{15625}=5$	Корень десятой степени (10)	$\sqrt[10]{1024}=2$ $\sqrt[10]{59049}=3$ $\sqrt[10]{1048576}=4$ $\sqrt[10]{9765625}=5$



Пример 1. Сравнить числа $5^{2\sqrt{3}}$ и $5^{3\sqrt{2}}$

Сравним показатели $2\sqrt{3}$ и $3\sqrt{2}$

Т.к. $2\sqrt{3}=\sqrt{12}$, $3\sqrt{2}=\sqrt{18}$ и 12 < 18, то $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$.

Поэтому по теореме $5^{2\sqrt{3}} < 5^{3\sqrt{2}}$

Пример 2. Решим уравнение

$4x = 2^{4\sqrt{3}}$

$4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$.

Поэтому уравнение можно записать так:

$2^{2x} = 2^{4\sqrt{3}}$

Получим, $2x = 4\sqrt{3}$, разделим на 2 обе части уравнения.

Следовательно, $x = 2\sqrt{3}$

Пример 3. Сравнить числа $\sqrt{2}$ и $\sqrt[3]{3}$

Избавимся от корней, для это возведем оба числа в шестую степень, т.к. шесть делится - наименьшее общее кратное двух и трех:

$(\sqrt{2})^6 = (2^{\frac{1}{2}})^6 = 2^3 = 8$

$(\sqrt{3})^6 = (3^{\frac{1}{3}})^6 = 3^2 = 9$

Т.к. 0<8<9 и $\frac{1}{6} > 0$, то $8^{\frac{1}{6}} > 9^{\frac{1}{6}}$, т.е. $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$.

Упростите выражение и вычислите при а = (−0,25)−2 ;

Основная литература:

Колягин Ю.М., Ткачева М.В, Федорова Н.Е. и др., под ред. Жижченко А.Б. Алгебра и начала математического анализа (базовый и профильный уровни) 10 кл. – М.: Просвещение, 2019.

ТЕМА: Векторы в пространстве и линейные операции над ними

Цели:

Образовательные:

Ввести понятие вектора в пространстве и линейные операции над ними**.**
Скалярное произведение векторов в пространстве.
Свойства скалярного произведения.
Правило сложения векторов в пространстве.

Развивающая: развитие познавательных интересов обучаемых

Оборудование учебного кабинета:

- рабочее место преподавателя;
- посадочные места по количеству обучающихся;
- учебно-методический комплекс по дисциплинам «Алгебра» и «Геометрия»;
- наглядные пособия: таблицы, карточки с заданиями

Определение. Вектором называется направленный отрезок прямой. Обозначается $\overline{AB}, \overline{a}$.

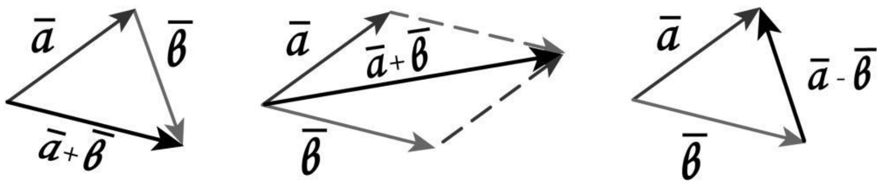
Определение. Модуль (длина) вектора – длина порождающего вектор отрезка. Обозначается $|\overline{AB}|, |\overline{a}|$.

Определение. Два вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной или на параллельных прямых.

Определение. Два вектора называются равными, если они коллинеарны, имеют одинаковые длины и направление.

Определение. Три вектора называются компланарными, если они лежат в одной или параллельных плоскостях.

1. <u>Сложение векторов</u>



Правило Треугольника   Правило Параллелограмма   Разность

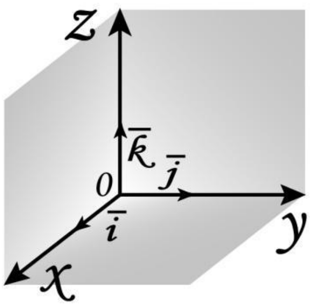
2. <u>Умножение вектора на число</u>. Произведением вектора $\bar a$ на число $\lambda \in R$ называется вектор $\lambda \bar a$, <u>Теорема</u> (необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов): $\bar a \parallel \bar b \;\Leftrightarrow\; \exists \lambda \in R: \bar a = \lambda \bar b$.

. Проекция вектора на ось

.Рассмотрим прямоугольную декартову систему координат – совокупность точки *O* – начала координат и трёх взаимно перпендикулярных осей *ox, oy, oz* с выбранными на них единицами масштаба, где $\bar i, \bar j, \bar k$ единичные векторы координатных осей *ox, oy, oz* соответственно.

Обозначим φ – угол между положительным направлением оси $\bar L$ и вектором $\overline{AB}$, отсчитываемый в направлении против движения часовой стрелки. Проекцией $\overline{AB}$ на ось $\bar L$ называется число *A'B'*, пр.$_L \overline{AB}$ = $|\overline{AB}| \cdot \cos\varphi$.

<u>Свойства проекций векторов</u> 1) $\text{пр}_{\bar L}(\bar a + \bar b) = \text{пр}_{\bar L}\bar a + \text{пр}_{\bar L}\bar b$;



2) $\text{пр}_{\bar L}(\lambda \bar a) = \lambda\, \text{пр}_{\bar L}\bar a \quad \forall \lambda \in R$

<u>Определение</u>. Проекции вектора $\bar a$ на координатные оси называются координатами вектора $\bar a$.

Обозначается $\bar a = \{a_x, a_y, a_z\}$, где a_x – пр.$_{Ox}\bar a$; a_y – пр.$_{Oy}\bar a$; a_z – пр.$_{Oz}\bar a$.

Длина вектора с помощью его координат определяется по формуле

$$|\bar a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ .$$

Выражение вида $\bar a = a_x \bar i + a_y \bar j + a_z \bar k$ называется разложением $\bar a$ по единичным векторам $\bar i, \bar j, \bar k$.

Пусть α, β, γ – углы, которые образует $\bar a$ соответственно с осями *ox, oy, oz*, тогда $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора, причём $\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar a|}, \cos\beta = \frac{a_y}{|\bar a|}, \cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar a|}$ и $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}{|\bar a|^2} = 1$.

Если заданы координаты начала вектора *A*(x_A, y_A, z_A) и его конца *B*(x_A, y_A, z_A), то координаты вектора $\overline{AB} = \{x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A\}$.

<u>Замечание</u>

Если векторы заданы в координатной форме, то есть $\bar a = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\bar b = \{b_x, b_y, b_z\}$, то линейные операции над векторами выполняются по правилам:

1. $\bar{a} \pm \bar{b} = \{a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z\}$;

2. $\lambda \bar{a} = \{\lambda \cdot a_x, \lambda \cdot a_y, \lambda \cdot a_z\}$.

. **Скалярное произведение векторов**

Определение. Скалярным произведением векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов, умноженному на косинус угла между ними, то есть $\bar{a}\cdot\bar{b} = (\bar{a},\bar{b}) = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos(\hat{\bar{a},\bar{b}})$.

Если векторы заданы в координатной форме, то есть $\bar{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\bar{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, то $(\bar{a},\bar{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

Свойства скалярного произведения векторов:

1) $\bar{a}\cdot\bar{b} = \bar{b}\cdot\bar{a}$;

2) $(\bar{a}+\bar{b})\cdot\bar{c} = \bar{a}\cdot\bar{c} + \bar{b}\cdot\bar{c}$;

3) $\lambda\cdot(\bar{a},\bar{b}) = (\lambda\cdot\bar{a},\bar{b}) = (\bar{a},\lambda\cdot\bar{b})$;

4) $\bar{a}\cdot\bar{a} = |\bar{a}|^2$.

С помощью скалярного произведения можно вычислить:

1) косинус угла между векторами 2) длину вектора $|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}\cdot\bar{a}}$;

3) проекцию одного вектора на другой $\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b} = \dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|}$.

Если векторы заданы в координатной форме, то

1) $\cos(\hat{\bar{a},\bar{b}}) = \dfrac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$**;** **2)** $|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$**;** **3)** $\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b} = \dfrac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$**.**

Необходимым и достаточным условием ортогональности двух векторов является равенство нулю их скалярного произведения: $\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a}\cdot\bar{b} = 0$ или $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$.

Из необходимого и достаточного условия параллельности двух векторов вытекает пропорциональность их координат $\dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z}$.

Примеры решения задач на тему «Скалярное произведение».

Пример 1. Найти скалярное произведение векторов a и b, если:

1) $|a|=3,\ |b|=1,\ \angle(a,b)=45^{\circ}$

Решение: Известны длины векторов и угол между ними, т.е. следует использовать формулу

$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos(\varphi)$.

Подставим: $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos(\varphi)=3\cdot1\cdot\cos\left(45^{\circ}\right)=2\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$ **Замечание:** угол между векторами острый – скалярное произведение положительно. **Ответ:** $\sqrt{2}$

2) $|a|=6,\ |b|=7,\ \angle(a,b)=120^{\circ}$

Решение: Известны длины векторов и угол между ними, т.е. следует использовать формулу

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos(\varphi).$$

Подставим: $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=6\cdot7\cdot\cos\left(120^{\circ}\right)=42\left(-\frac{1}{2}\right)=-21$ **Замечание:** угол между векторами тупой – скалярное произведение отрицательно. **Ответ:** -21

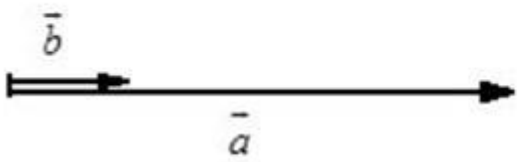
3) $|a|=4,\ |b|=2,\ \angle(a,b)=90^{\circ}$

Решение: Известны длины векторов и угол между ними, т.е. следует использовать формулу

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos(\varphi).$$

Подставим: $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=4\cdot2\cdot\cos\left(90^{\circ}\right)=8\cdot0=0$ **Замечание:** угол между векторами прямой (вектора перпендикулярны) – скалярное произведение равно нулю. Этот факт применяют в случае, если требуется определить, являются ли вектора взаимоперпендикулярными. **Ответ:** 0

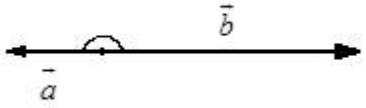
4) $|a|=5,\ |b|=1$, a и b сонаправлены. **Решение:**
Известны длины векторов и то, что они сонаправлены, т.е. они параллельны или лежат на одной прямой и направлены в одну сторону.



Угол между ними равен нулю. Используем ту же формулу $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos(\varphi)$.

Подставим: $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=5\cdot1\cdot\cos\left(0^{\circ}\right)=5\cdot1=5$ **Ответ:** 5.

5) $|a| = 2,\ |b| = 3$, а и b противоположно направлены.
Решение: Известны длины векторов и то, что они противоположно направлены, т.е. они параллельны или лежат на одной прямой и направлены в разные стороны.



Угол между ними развернутый, т.е. равен 180 градусов. Подставим:
$\left(\bar{a}, \bar{b}\right) = 2 \cdot 3 \cdot \cos\left(180^\circ\right) = 2 \cdot 3 \cdot (-1) = -6$ **Ответ:** -6.

Пример 2.Найти скалярное произведение векторов
$a = 4i - 3j + k$ и $b = -i + 2j - 3k$.
Решение:
Здесь векторы *a* и *b* заданы как суммы базисных векторов (в ортонормированном базисе), т.е. они имеют координаты $a = \{4; -3; 1\}$ и $b = \{-1; 2; -3\}$.
Известны их координаты, поэтому для вычисления скалярного произведения применим формулу $(a, b) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$
(стрелочки над векторами ставить не будем, как и в большинстве задачников, но, вообще говоря, они должны быть).
Подставим: $(a, b) = 4 \cdot (-1) + (-3) \cdot (2) + 1 \cdot (-3) = -4 - 6 - 3 = -13$ **Ответ:** -13.

Пример 3. Вычислить скалярное произведение $(4a - 3b) \cdot (-a + b)$, если известно, что $a = \{1; -1; 2\}$ и $b = \{-1,5;\ 2; 1,3\}$.
Замечание: здесь использовано альтернативное обозначение операции скалярного умножения векторов: $(\cdot)$.
Решение:
Первый вектор в скалярном произведении: $v = 4a - 3b$. Найдем его координаты, используя элементы векторной алгебры.

$$v = 4a - 3b = 4\{1; -1; 2\} - 3\{-1,5;\ 2; 1,3\} = \{4; -4; 8\} + \{4,5;\ -6; -3,9\} =$$
$$= \{4 + 4,5; -4\ -6; 8 - 3,9\} = \{8,5; -10; 4,1\}$$

Аналогично со вторым вектором: $u = -a + b$. Найдем его координаты, используя элементы векторной алгебры.

$$u = -a + b = -\{1; -1; 2\} + \{-1,5;\ 2; 1,3\} = \{-1; 1; -2\} + \{-1,5;\ 2; 1,3\} =$$
$$= \{-1 - 1,5; 1 + 2; -2 + 1,3\} = \{-2,5;\ 3;\ -0,7\}$$

Далее по формуле:
$$v \cdot u = \{8,5; -10; 4,1\} \cdot \{-2,5;\ 3;\ -0,7\} = v_x u_x + v_y u_y + v_z u_z =$$
$$= 8,5 \cdot (-2,5) + (-10) \cdot 3 + 4,1 \cdot (-0,7) = -21,25 - 30 - 2,87 = -54,12$$
Ответ: -54,12

Пример 4: Вычислить скалярное произведение $(a+2b)\cdot(-a-b)$, если известно, что $|a|=2$, $|b|=7$, $\angle(a,b)=\dfrac{\pi}{6}$.

Решение:
Здесь неизвестны координаты векторов a и b, поэтому найти координаты векторов $v=a+2b$ и $u=-a-b$ затруднительно.
Используем свойства скалярного произведения (см. Свойства скалярного произведения векторов.):

$$(a+2b)\cdot(-a-b)=$$

Применим свойство **7)**

$$=a\cdot(-a-b)+2b\cdot(-a-b)=$$
$$=a\cdot(-a)+a\cdot(-b)+2b\cdot(-a)+2b\cdot(-b)=$$

И свойство **6)**

$$=-a\cdot a-a\cdot b-2b\cdot a-2b\cdot b=$$

И свойство **3)**

$$=-|a|^2-a\cdot b-2b\cdot a-2|b|^2=$$

И свойство **1)**

$$=-|a|^2-a\cdot b-2a\cdot b-2|b|^2=-|a|^2-3a\cdot b-2|b|^2=$$
$$=-|a|^2-3|a|\cdot|b|\cos(\angle(a,b))-2|b|^2=$$
$$=-2^2-3\cdot 2\cdot 7\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-2\cdot 7^2=-4-42\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-98=-102-21\sqrt{3}$$

Ответ: $-102-21\sqrt{3}$

Пример 5 Найти угол φ между векторами $a=\{1;-1;2\}$ и $b=\{-1;0;8\}$
Решение: Применим формулу

$$\cos(\varphi)=\frac{a\cdot b}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

Подставим

$$\cos(\varphi)=\frac{1\cdot(-1)+(-1)\cdot 0+2\cdot 8}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}\sqrt{(-1)^2+0^2+8^2}}=\frac{15}{\sqrt{6}\sqrt{65}}=\frac{15\sqrt{390}}{390}=$$
$$=\frac{\sqrt{390}}{26}$$
$$\varphi=\arccos\left(\frac{\sqrt{390}}{26}\right)$$

Решение различных задач на вычисление скалярного произведения векторов сводится к использованию свойств скалярного произведения и формул

1. $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right)$;

2. $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \left|\vec{a}\right| \cdot np_{\vec{a}}\vec{b} = \left|\vec{b}\right| \cdot np_{\vec{b}}\vec{a}$;

3. $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$ или $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$;

4. $\left(\vec{a}, \vec{a}\right) = \left|\vec{a}\right|^2$.

Пример. Вычислите скалярное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если их длины равны *3* и *7*единиц соответственно, а угол между ними равен *60* градусам.

Решение.

У нас есть все данные, чтобы вычислить скалярное произведение по определению: $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = 3 \cdot 7 \cdot \cos 60^\circ = 3 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} = \frac{21}{2}$.

Ответ: $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{21}{2}$.

Пример. В прямоугольной системе координат заданы два вектора $\vec{a} = \left(1, -1, \sqrt{2} - 3\right)$ и $\vec{b} = \left(0, 2, \sqrt{2} + 3\right)$, найдите их скалярное произведение.

Решение.

В этом примере целесообразно использовать формулу, позволяющую вычислить скалярное произведение векторов через их координаты:

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z =$$

$$= 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 + \left(\sqrt{2} - 3\right) \cdot \left(\sqrt{2} + 3\right) = 0 - 2 + (2 - 9) = -9$$

Ответ: $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = -9$.

Пример. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$, если известны координаты трех точек в прямоугольной декартовой системе координат на плоскости $A(1, -3),\quad B(5, 4),\quad C(1, 1)$.

Решение.

Найдем координаты векторов по координатам точек их начала и конца:

$$\vec{AB} = (5 - 1, 4 - (-3)) = (4, 7)$$

$$\vec{AC} = (1 - 1, 1 - (-3)) = (0, 4)$$

Теперь можно использовать формулу для вычисления скалярного произведения в координатах:

$$\left(\vec{AB}, \vec{AC}\right) = 4 \cdot 0 + 7 \cdot 4 = 0 + 28 = 28$$

Ответ: $\left(\vec{AB}, \vec{AC}\right) = 28$.

Тема: **Иррациональные уравнения и методы решения**

Цели и задачи:

Ввести понятия иррационального уравнения.

виды иррациональных уравнении и методы их решения.

Оборудование учебного кабинета:

- рабочее место преподавателя;
- посадочные места по количеству обучающихся;
- учебно-методический комплекс по дисциплинам «Алгебра» и «Геометрия»;
- наглядные пособия: таблицы, карточки с заданиями

Изучение нового материала

Иррациональным называется уравнение, в котором неизвестное (переменная) содержится под знаком корня или под знаком операции возведения в рациональную (дробную) степень.

Для решения иррациональных уравнений обычно используются следующие приемы:

1) возведение в соответствующую степень обе части уравнения;
2) введение новой переменной;
3) сведение к системе уравнений;
4) применение свойств функций, входящих в уравнение.

При решении иррациональных уравнений необходима проверка всех найденных корней путем их подстановки в исходное уравнение или нахождение ОДЗ и следующий анализ корней (при решении методом приведения к равносильной смешанной системе уравнений и неравенств необходимость в этом отпадает).

Простейшим иррациональным уравнением является уравнение вида:

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x),$$

при решении которого важную роль играет четность или нечетность ***n***.

Если ***n***- нечетное, то данное уравнение равносильно уравнению

$$f(x) = (g(x))^n.$$

Если ***n*** - четное, то, так как корень считается арифметическим, необходимо учитывать ОДЗ (область допустимых значений): $f(x) \geq 0$. Уравнение $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$ в этом случае равносильно системе:

$$\begin{cases} f(x) = (g(x))^n \\ g(x) \geq 0 \end{cases}.$$

Примеры:

1. $\sqrt{x} = 2$; $x = 2^2$; $x = 4$; Ответ: x=4

2.Решить уравнения: $\sqrt{x-2} = 1$,

Решение.

1) В левой части стоит корень второй степени, чтобы избавиться от него, возведём обе части уравнения во вторую степень:

$(\sqrt{x-2})^2 = 1^2$; $x - 2 = 1$; Решаем полученное уравнение: $x = 3$.

Выполним проверку. Подставим найденный корень 3 в исходное уравнение.

$\sqrt{3-2} = 1$; $\sqrt{1} = 1 -$ верно. *Ответ:3*

Пример 3: Решите уравнение $\sqrt{x^2+7x-2}=6-x$,

Возводим обе части уравнения в квадрат.

$$\left(\sqrt{x^2+7x-2}\right)^2=(6-x)^2$$

$$x^2+7x-2=36-12x+x^2$$

$$19x-38=0$$

$$x=2$$

Выполним проверку. $x=2$: $\sqrt{(2)^2+7\cdot2-2}=6-2$ $\sqrt{16}=4-$ верно. Ответ: 2.

Пример 3. Уравнения вида $\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{g(x)}$, решаются следующим образом:

n – нечетное

n - четное $\Rightarrow\begin{cases}f(x)=g(x)\\f(x)\geq0\end{cases}$ или $\begin{cases}f(x)=g(x)\\g(x)\geq0\end{cases}$.

Решите уравнение: $\sqrt{x-5}=\sqrt{2x-3}$

1 способ: Рассмотрим область определения функций:

$\begin{cases}x-5\geq0\\2x-3\geq0\end{cases}$

$\begin{cases}x\geq5\\x\geq1{,}5\end{cases}$

x-5=2x-3

x=-2, но -2 не входит в область определения функций, следовательно, решений нет. Ответ: решений нет.

2 способ:

x-5=2x-3; x=-2

Проверка:

$\sqrt{-2-5}=\sqrt{-7}, -7<0$

$\sqrt{2(-2)-3}=\sqrt{-7}, -7<0$

Значит, x=-2- посторонний корень Ответ: решений нет

Пример 4. Решить уравнение $\sqrt[3]{x^3-2x+1}=1$.

Решение. Так как в данном примере $n=3$ - нечетное, то после возведения обеих частей уравнения в третью степень получим равносильное данному уравнение:

$$x^3-2x+1=1^3 \Leftrightarrow x^3-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{2} \end{cases}.$$

Ответ: $x_1=-\sqrt{2}, x_2=0, x_3=\sqrt{2}$.

Пример 5. Решить уравнение $\sqrt{x+1}=2-x$.

Решение. Так как $n=2$ - четное, то исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x+1=(2-x)^2 \\ 2-x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=4-4x+x^2 \\ x\leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x+3=0 \\ x\leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{2} \\ x\leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{5-\sqrt{13}}{2}.$$

Ответ: $x=(5-\sqrt{13})/2$.

3. Решение уравнений вида $\sqrt{f(x)}\pm\sqrt{g(x)}=a$ и $\sqrt{f(x)}\pm\sqrt{g(x)}=\sqrt{h(x)}$

Пример 6. Решить уравнения:1) $\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}=4$,

2) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}=\sqrt{11-x}$.

Решение

1) Возведём в квадрат обе части уравнения:

$$\Big(\underbrace{\sqrt{x+2}}_{a}+\underbrace{\sqrt{3x-2}}_{b}\Big)^2=4^2.$$

В левой части уравнения воспользуемся формулой $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$:

$$\left(\sqrt{x+2}\right)^2+2\cdot\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{3x-2}+\left(\sqrt{3x-2}\right)^2=16$$

$$x+2+2\cdot\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{3x-2}+3x-2=16$$

$$4x+2\cdot\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{3x-2}=16$$

Перенесём все слагаемые, кроме того, которое содержит корень, в одну часть уравнения:

$$2\cdot\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{3x-2}=16-4x$$

$$\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{3x-2}=8-2x$$

$$\sqrt{(x+2)(3x-2)}=8-2x$$

Мы получили уравнение вида $\sqrt{f(x)}=g(x)$. С его решением мы уже знакомы.

Возводим в квадрат обе части уравнения:

$$\left(\sqrt{(x+2)(3x-2)}\right)^2=(8-2x)^2$$

$$(x+2)(3x-2)=64-32x+4x^2$$

$$3x^2-2x+6x-4-64+32x-4x^2=0$$

$$-x^2+36x-68=0$$

$$x^2-36x+68=0$$

Получили квадратное уравнение. Решим его:

$$D=b^2-4ac=(-36)^2-4\cdot 68=1024=32^2$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a};\quad x_1=\frac{36+32}{2}=34;\quad x_2=\frac{36-32}{2}=2$$

Выполним проверку. Подставляем корни в исходное уравнение:

$x=34$: $\sqrt{34+2}+\sqrt{3\cdot 34-2}=4$; $6+10=4$ – неверно.

$x=2$: $\sqrt{2+2}+\sqrt{3\cdot 2-2}=4$; $2+2=4$ – верно. **Ответ**: 2.

Пример 7. Решить уравнение $\sqrt{2x-9}-\sqrt{x-3}=1$.

Решение. Запишем уравнение в виде: $\sqrt{2x-9}=1+\sqrt{x-3}$. Так как теперь обе части полученного уравнения неотрицательны, то возведем их в квадрат:

$$2x-9=1+x-3+2\sqrt{x-3}\quad\Leftrightarrow\quad x-7=\sqrt{x-3}.$$

Полученное уравнение равносильно исходному. Для его решения рассмотрим систему:

$$\begin{cases}x-7\ge 0\\(x-7)^2=4(x-3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 7\\x^2-14x+49=4x-12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 7\\x^2-18x+61=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \ge 7 \\ x = 9 \pm \sqrt{20} \end{cases} \Leftrightarrow \quad x = 9 + \sqrt{20}$$

.**Ответ:** $x = 9 + \sqrt{20}$.

Введение новой переменной в ряде случаев позволяет перейти от иррационального уравнения к рациональному уравнению.

Пример 8.*1*

Решить уравнение $x^2 + 3x + 4\sqrt{x^2 + 3x - 5} = 10$.

Решение. Возведение данного уравнения в квадрат привело бы к уравнению четвертой степени, что нерационально. Поэтому запишем уравнение в виде $x^2 + 3x - 5 + 4\sqrt{x^2 + 3x - 5} = 5$ и введем «новую» переменную:

$$y = \sqrt{x^2 + 3x - 5}, \; y \ge 0.$$

Получим $y^2 + 4y - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = -5 \end{array}\right.$.

Вернемся к «старым» переменным $\sqrt{x^2 + 3x - 5} = 1$ или $\sqrt{x^2 + 3x - 5} = -5$. Второе из полученных уравнений решений не имеет, а решения первого есть числа $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}$.

Ответ: $x_1 = \dfrac{-3 - \sqrt{33}}{2}, x_2 = \dfrac{-3 + \sqrt{33}}{2}$.

Иногда при решении иррационального уравнения возникает необходимость ввести не одну, а несколько «новых» переменных. Такая ситуация возникает, например, при решении уравнений, содержащих радикалы разных степеней.

8.2.Решите уравнение: $\sqrt{\frac{2-x}{x+3}} + \sqrt{\frac{x+3}{2-x}} = \frac{10}{3}$

Выражения $\sqrt{\frac{2-x}{x+3}}$ и $\sqrt{\frac{x+3}{2-x}}$ обратные, заменим $t = \sqrt{\frac{2-x}{x+3}}$, тогда $\sqrt{\frac{x+3}{2-x}} = \frac{1}{t}$. Получаем дробно-рациональное уравнение относительно t:

$t + \frac{1}{t} = \frac{10}{3}$.

Избавимся от знаменателя, домножим обе части уравнения на $t\ (t \ne 0)$:

$$t^2 + 1 = \frac{10t}{3}$$

$$t^2 - \frac{10t}{3} + 1 = 0$$

$$D = \frac{100}{9} - 4 \cdot 1 = \frac{64}{9}$$

$$t_1 = \frac{\frac{10}{3} + \frac{8}{3}}{2} = 3$$

$$t_2 = \frac{\frac{10}{3} - \frac{8}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

Теперь выполним обратную замену:

1. $\sqrt{\frac{2-x}{x+3}} = 3$.

Возведём обе части уравнения в квадрат:

$$\left(\sqrt{\frac{2-x}{x+3}}\right)^2 = 3^2$$

$$\frac{2-x}{x+3} = 9.$$

Уравнение дробно-рациональное. Решим его:

ОДЗ: $x + 3 \neq 0$; $x \neq -3$

$$\frac{2-x}{x+3} - \frac{9^{(x+3}}{1} = 0$$

$$\frac{2 - x - 9x - 27}{x+3} = 0$$

$$\frac{-10x - 25}{x+3} = 0$$

Избавимся от знаменателя, домножим обе части уравнения на $x + 3$:

$$-10x - 25 = 0$$

$-10x = 25$; $x = -2{,}5$ – входит в ОДЗ.

Выполним проверку: $\sqrt{\frac{2-(-2{,}5)}{-2{,}5+3}} + \sqrt{\frac{-2{,}5+3}{2-(-2{,}5)}} = \frac{10}{3}$; $3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$ – верно.

2. $\sqrt{\frac{2-x}{x+3}} = \frac{1}{3}$

Возведём обе части уравнения в квадрат:

$$\left(\sqrt{\frac{2-x}{x+3}}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\frac{2-x}{x+3} = \frac{1}{9}$$

Уравнение дробно-рациональное. Решим его:

ОДЗ: $x+3 \neq 0$; $x \neq -3$

$$\frac{2-x^{(9}}{x+3} - \frac{1^{(x+3}}{9} = 0$$

$$\frac{18-9x-x-3}{x+3} = 0$$

$$\frac{15-10x}{x+3} = 0$$

Избавимся от знаменателя, домножим обе части уравнения на $x+3$:

$15-10x=0$; $-10x=-15$; $x=1{,}5$ – входит в ОДЗ.

Выполним проверку:

$\sqrt{\frac{2-1{,}5}{1{,}5+3}} + \sqrt{\frac{1{,}5+3}{2-1{,}5}} = \frac{10}{3}$; $\sqrt{\frac{0{,}5}{4{,}5}} + \sqrt{\frac{4{,}5}{0{,}5}} = \frac{10}{3}$; $\sqrt{\frac{1}{9}} + \sqrt{9} = \frac{10}{3}$ – верно **Ответ**: $-2{,}5$; $1{,}5$.

Пример 9.

Решить уравнение $\sqrt{x-2} + \sqrt[3]{11-x} = 1$.

Решение. Пусть $u = \sqrt{x-2} \geq 0$ и $v = \sqrt[3]{1-x}$. Тогда $u+v=1$. С другой стороны $u^2+v^3 = x-2+11-x = 9$. Получаем систему

$$\begin{cases} u+v=1 \\ u^2+v^3=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1-v \\ (1-v)^2+v^3=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1-v \\ v^3+v^2-2v-8=0 \end{cases}.$$

Решим последнее уравнение системы:

$$v^3+v^2-2v-8=0 \quad \Leftrightarrow \quad (v^3-8)+v(v-2)=0 \Leftrightarrow$$

$$(v-2)(v^2+2v+4+v)=0 \iff \left[\begin{array}{l} v=2 \\ v^2+3v+4=0 \end{array}\right. \iff v=2$$.

Получим, что $v=2$, а тогда $u=1-v=-1<0$. По условию $u \geq 0$, следовательно исходное уравнение решений не имеет.

Ответ: нет решений.

При решении некоторых иррациональных уравнений нахождение области допустимых значений входящих в уравнение неизвестных может существенно облегчить решение уравнения.

При решении иррациональных уравнений бывает полезно воспользоваться монотонностью функций.

Пример 10.

Решить уравнение $\sqrt{2(x+6)}=6-\sqrt[3]{x+6}$.

Решение. Один корень данного уравнения $x=2$ легко найти подбором. Покажем, что других корней нет. Запишем уравнение в виде $\sqrt{2(x+6)}+\sqrt[3]{x+6}=6$.

По свойству степенных функций

функции $y_1(x)=\sqrt{2(x+6)}$ и $y_2(x)=\sqrt[3]{x+6}$ являются возрастающими на промежутке $[-6;\infty)$, где они обе определены. Поэтому их сумма $y(x)=\sqrt{2(x+6)}+\sqrt[3]{x+6}$ на этом промежутке также возрастает, следовательно, она принимает каждое свое значение (в том числе и 6) только один раз. Поэтому других корней нет.

Ответ: $x=2$.

Тема: Показательные уравнения .

Цели занятия:

Образовательная:

Ввести понятие показательное уравнение. Рассмотреть виды показательных уравнении и разобрать методы их решения.

Воспитательная:

Прививать трудолюбие и аккуратность, создать условия для воспитания интереса к изучаемой теме, положительного отношения к знаниям, воспитание дисциплинированности.

Ход занятии

Определение.Уравнение, содержащее переменную в показателе степени, называется ***показательным***. Простейшим примером показательного уравнения служит уравнение $a^x=b$ ($a>0$, $a\neq1$).

Решение показательного уравнения вида $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ ($a>0$, $a\neq1$) основано на том, что это уравнение равносильно уравнению $f(x)=g(x)$.

Следствие. Пусть $a>0$, $a\neq1$. Если степени с основанием a равны, то их показатели равны, т.е. если $a^s=a^t$, то $s=t$.

Приведение обеих частей уравнения к одному основанию

Этот способ основан на свойстве степеней: если две степени равны и их основания равны, то равны и их показатели.

Пример 1. Решите уравнение $5^x = 625$.

Решение. $5^x = 625$; $5^x = 5^4$; $x=4$.

Ответ: 4

Пример 2. Найдите корень уравнения $3^{x+1} = \frac{1}{27}$.

Решение. Перейдем к одному основанию степени: $3^{x+1} = \frac{1}{27}$ $\Leftrightarrow$ $3^{x+1} = 3^{-3}$ $\Leftrightarrow$ $x+1=-3$ $\Leftrightarrow$ $x=-2$.

Ответ: -2

Задание 1. Решите уравнение…

1) $5^x=125$ 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\frac{1}{81}$ 3) $27^x=\frac{1}{3}$ 4) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = -2$ 5) $\left(\frac{1}{5}\right)^x=625$

Пример 3. Решите уравнение $3^{x^2-4x} = 3^{2x-8}$.

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению $x^2-4x=2x-8$ или $x^2-6x+8=0$.

Решая квадратное уравнение, находим $x_1=2$, $x_2=4$. Эти числа являются корнями исходного показательного уравнения.

Ответ: 2; 4

Задание 2. Решите уравнение…

1) $3^{2x^2-3x+5} = 3^{x^2+2x-1}$ 2) $2^{x^2-3x} = 2^{x-8}$ 3) $4^{x^2-3x+5} = 3^{2x-1}$

Пример 3. Решите уравнение $10^{2x-5}=100$.

Решение. $10^{2x-5}=100$; $10^{2x-5}=10^2$; $2x-5=2$; отсюда $x=3{,}5$.

Ответ: 3,5

Пример 4. Найдите корень уравнения $3^{2-x}=1$.

Решение. Перейдем к одному основанию степени: $3^{2-x}=3^0 \Leftrightarrow 2-x=0 \Leftrightarrow x=2$.

Ответ: 2

Задание 3. Решите уравнение…

1) $3^{5-2x}=81$ 2) $4^{8+5x}=1$ 3) $3^{2-x}=27$ 4) $4^{x^2+x}=16$ 5) $2^{x+2}=128$

Пример 6. Решите уравнение $2^{x^2-6x-2,5}=16\sqrt{2}$.

Решение. Уравнение решается приведением левой и правой частей к степеням с равными основаниями. $16\sqrt{2}=2^4\cdot 2^{1/2}=2^{4,5}$.

Из уравнения $2^{x^2-6x-2,5}=2^{4,5}$ получаем $x^2-6x-2,5=4,5$, откуда $x=-1$ и $x=7$.

Ответ: - 1; 7

Пример 7. Найдите корень уравнения $16^{x+1}=\frac{1}{4}$.

Решение. Перейдем к одному основанию степени: $16^{x+1}=\frac{1}{4}$ $\Leftrightarrow$ $(4^2)^{x+1}=4^{-1}$ $\Leftrightarrow$ $2(x+1)=-1$ $\Leftrightarrow$ $x=-1,5$.

Ответ: $-1,5$

Пример 8. Найдите корень уравнения $3^{2+x}=\sqrt{27}$.

Решение. Приведем обе части уравнения к основанию 3: $3^{2+x}=3^{\frac{3}{2}}$ $\Leftrightarrow$ $2+x=\frac{3}{2}=1,5$ $\Leftrightarrow$ $x=1,5-2=-0,5$.

Ответ: $-0,5$

Задание 4. Решите уравнение…

1) $(7^{x+1})^{\frac{1}{5}}=7$ 2) $(5^{x+2})^{\frac{1}{8}}=5$ 3) $10^{2x}=2^x\cdot 5^x$ 4) $3^x\cdot 5^x=15^{3x}$

Пример 9. Решите уравнение $0,625^{4x+1}=1,6^{3-2x}$.

Решение. Приведем обе части уравнения к одному основанию:

$\left(\frac{625}{1000}\right)^{4x+1}=\left(\frac{16}{10}\right)^{3-2x}$; $\left(\frac{5}{8}\right)^{4x+1}=\left(\frac{8}{5}\right)^{3-2x}$; $\left(\frac{5}{8}\right)^{4x+1}=\left(\frac{5}{8}\right)^{-3+2x}$;

$4x+1=2x-3$; $2x=-4$; $x=-2$.

Ответ: - 2

Пример 10. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^{2-x}=9^x$.

Решение. Перейдем к одному основанию степени: $(\frac{1}{3})^{2-x} = 9^x$ $\Leftrightarrow$ $(3^{-1})^{2-x} = (3^2)^x$ $\Leftrightarrow$ $-1(2-x) = 2x$ $\Leftrightarrow$ $-2+x = 2x$ $\Leftrightarrow$ $x = 2$.

Ответ: 2

Пример 11. Найдите корень уравнения $9^{2+x} = 27^{2x}$.

Решение. Приведем обе части уравнения к основанию 3: $(3^2)^{2+x} = (3^3)^{2x}$ $\Leftrightarrow$ $2(2-x) = 2x$ $\Leftrightarrow$ $x = 1$.

Ответ: 1

Задание 5. Решите уравнение…

1) $0{,}3^{x-1} = 0{,}09^x$ 2) $0{,}25^x = 0{,}5^{x+1}$ 3) $(\frac{7}{13})^{3-2x} = (\frac{13}{7})^{4+3x}$ 4) $3^{x-1} = 27^x$

Пример 12. Решите уравнение $2^x \cdot 7^x = 196$.

Решение. Воспользуемся свойством степени:

$2^x \cdot 7^x = 196$; $(2 \cdot 7)^x = 14^2$; $14^x = 14^2$. Отсюда x=2.

Ответ: 2

Задание 6. Решите уравнение…

1) $2^x \cdot 3^x = 36$ 2) $\sqrt{2^x} \cdot \sqrt{3^x} = 36$ 3) $10^{2x} = 2^x \cdot 5^x$ 4) $3^x \cdot 5^x = 15^{3x}$

Пример 13. Решите уравнение $3 \cdot 9^x = 81$.

Решение. $3 \cdot 9^x = 81$; $9^x = 27$; $3^{2x} = 3^3$; $2x$=3; $x=\frac{3}{2}$.

Ответ: $\frac{3}{2}$

Пример 14. Найдите корень уравнения $0,25 \cdot 2^{2x+2} = \frac{1}{64}$.

Решение. Приведем обе части уравнения к основанию 2: $0,25 \cdot 2^{2x+2} = \frac{1}{64}$ $\Leftrightarrow$ $2^{-2} \cdot 2^{2x+2} = 2^{-6}$ $\Leftrightarrow$ $2^{2x} = 2^{-6}$ $\Leftrightarrow$ $2x = -6$ $\Leftrightarrow$ $x = -3$.

Ответ: -3

Пример 15. Найдите корень уравнения $5^{x-3} = 0,2 \cdot 5^{2x}$.

Решение. Преобразуем правую часть уравнения: $0,2\cdot5^{2x}=\frac{2}{10}\cdot5^{2x}=\frac{1}{5}\cdot5^{2x}=5^{-1}\cdot5^{2x}=5^{2x-1}$.

Получаем уравнение $5^{x-3}=5^{2x-1}\Leftrightarrow x-3=2x-1\Leftrightarrow x=-2$

Ответ: -2

Задание 7. Решите уравнение…

1) $8\cdot4^x=256$ 2) $9\cdot3^{1+x}=\frac{1}{27}$ 3) $0{,}25\cdot2^{2x+2}=\frac{1}{64}$ 4) $3\cdot2^{x-1}=96$

Пример 16. Решите уравнение $\sqrt{8^{x-1}}=\sqrt[3]{4^{2-x}}$.

Решение. По определению корня имеем: $8^{\frac{x-1}{2}}=4^{\frac{2-x}{3}}$.

Приведем обе части уравнения к одному основанию:

$(2^3)^{\frac{x-1}{2}}=(2^2)^{\frac{2-x}{3}}$; $2^{\frac{3(x-1)}{2}}=2^{\frac{2(2-x)}{3}}$.

$\frac{3(x-1)}{2}=\frac{2(2-x)}{3}$; $9(x-1)=4(2-x)$; $9x-9=8-4x$; $13x=17$; $x=\frac{17}{13}$.

Ответ: $\frac{17}{13}$

Задание 8. Решите уравнение…

1) $\sqrt{5^{x+2}}=\sqrt[5]{5}^{\,1}$ 2) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{2^x}}}=4$ 3) $\sqrt[3]{49^{2x+1}}=\sqrt[5]{7}^{\,7}$ 4) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{3^x}}}=27$

Пример 17. Решите уравнение $2^{|x+1|}=4$.

Решение. $2^{|x+1|}=4$; $2^{|x+1|}=2^2$; $|x+1|=2\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=2, x+1>0\\-x-1=2, x+1<0\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=1,\ x>-1\\x=-3,\ x<-1\end{cases}$

Ответ: 1; - 3

Задание 9. Решите уравнение…

1) $3^{|x-2|}=9$ 2) $3^{|x^2-2|}=9$ 3) $8^{|x^2-1|}=16$ 4) $2^{|x-2|}=8$

8) $25^{|x+4|}=125^{|x|}$

Пример 18. Решите уравнение $3 \cdot 2^{x-2} = 2 \cdot 3^{x-2}$.

Решение. $3 \cdot 2^{x-2} = 2 \cdot 3^{x-2}$; $\frac{3}{2} = \frac{3^{x-2}}{2^{x-2}}$; 1=x – 2; x=3.

Ответ: 3

Задание 10. Решите уравнение…

1) $2 \cdot 7^{2x-9} = 7 \cdot 2^{2x-9}$

3) $11 \cdot 2^{2x+11} = 2 \cdot 11^{2x+11}$

5) $3 \cdot 2^{3x-2} = 2 \cdot 3^{3x-2}$

Решение показательных уравнений разложением на множители

Этот способ используется в уравнениях, в левой части которых записана сумма или разность степеней с одним основанием.

Причем, если a>1, выносится степень с меньшим показателем; если 0<a<1 – степень с большим показателем.

Пример 19. Решите уравнение $5^{2x+1} - 3 \cdot 5^{2x-1} = 550$.

Решение. Вынесем в левой части уравнения 5^{2x-1}.

Получим $5^{2x-1}(5^2 - 3) = 550$; $5^{2x-1} = 25 = 5^2$; 2x – 1=2, x=$\frac{3}{2}$.

Ответ: $\frac{3}{2}$

Пример 20. Решите уравнение $5^{x^2+3x-4} + 4 \cdot 5^{x^2+3x-4} = 5$; Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[0;2]$.

Решение. Вынесем в левой части уравнения 5^{x^2+3x-1} за скобки. Получим $5^{x^2+3x-4}(1+4) = 5$; $5^{x^2+3x-4} = 1 = 5^0$; $x^2 + 3x - 4 = 0$; $D = 25$, $x_1 = -4$, $x_2 = 1$.

Промежутку $[0;2]$ принадлежит корень $x_2 = 1$.

Ответ: $\{-4;1\}$; 1

Задание 11. Решите уравнение…

1) $3^{x+2} - 2 \cdot 3^x = 7$ 2) $2 \cdot 3^{x+1} + 3^{x+3} = 33$ 3) $4^{x+2} - 3 \cdot 4^x = 13$

Пример 21. Решите уравнение $2 \cdot 3^{x-1} - 3^{x-2} = 5^{x-2} + 4 \cdot 5^{x-3}$.

Решение. Вынесем в левой части уравнения 3^{x-2}, в правой части 5^{x-3} за скобки: $3^{x-2}(2\cdot 3-1)=5^{x-3}(5+4)$.

Получим $3^{x-2}\cdot 5=5^{x-3}\cdot 3^2$.

Разделим обе части этого уравнения на $5\cdot 3^2$ и получим $3^{x-4}=5^{x-4}$. Заметим, что равны не основания, а показатели.

Разделим обе части этого уравнения на 5^{x-4}. Тогда $\left(\frac{3}{5}\right)^{x-4}=1$ или $\left(\frac{3}{5}\right)^{x-4}=\left(\frac{3}{5}\right)^0$. Отсюда x=4.

Ответ: 4

Пример 22. Решите уравнение $2^{x^2-2x+1}+2^{x^2-2x}=6$; Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-1;2]$.

Решение. Вынесем в левой части уравнения 2^{x^2-2x} за скобки. Получим $2^{x^2-2x}(2^1+1)=6$; $2^{x^2-2x}=2$; $x^2-2x-1=0$; $D=0$, $x=1$.

Промежутку $[-1;2]$ принадлежит корень $x=1$.

Ответ: 1; 1

Пример 23. Решите уравнение $27^x-5\cdot 9^x-3^{x+2}+45=0$; Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[\log_3 2;\log_3 7]$.

Решение. Разложим левую часть уравнения на множители: $27^x-5\cdot 9^x-3^{x+2}+45=0 \Leftrightarrow 27^x-5\cdot 9^x-9\cdot 3^x+45=0 \Leftrightarrow$

$9^x(3^x-5)-9(3^x-5)=0 \Leftrightarrow (9^x-9)(3^x-5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9^x=9, \\ 3^x=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=\log_3 5 \end{array}\right.$.

Промежутку $[\log_3 2;\log_3 7]$ принадлежат оба корня: $x=\log_3 5$ и 1 ($1=\log_3 3$).

Ответ: $\{1;\log_3 5\}$; $\{1;\log_3 5\}$

Задание 12. Решите уравнение…

1) $4^{x+3}+2^{2x+2}=51$ 2) $9^x-2^{x+0,5}=2^{x+3,5}-3^{2x-1}$

Решение показательных уравнений заменой переменной

Уравнения вида $Aa^{2x}+Ba^x+c=0$ сводятся к решению квадратного уравнения $At^2+Bt+c=0$ при помощи замены $t=a^x, t>0$.

Пример 24. Решите уравнение 5^{2x} - $6\cdot 5^x$+5=0.

Решение. Положим $5^x=y$. Тогда $5^{2x}=(5^x)^2=y^2$ и данное уравнение примет вид $y^2 - 6y+5=0$. Корни этого уравнения: $y_1=1$; $y_2=5$. Следовательно, $5^x=1$, т.е. $x=0$, и $5^x=5$, т.е. $x=1$.

Ответ: 1

Пример 25. Решите уравнение $9^{x-0,5}-8\cdot 3^{x-1}+5=0$; Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $(1;3)$.

Решение. Преобразуем исходное уравнение $3\cdot 9^{x-1}-8\cdot 3^{x-1}+5=0$. Получили квадратное уравнение относительно 3^{x-1} с коэффициентами 3, - 8 и 5 и $D=4$.

Отсюда $3^{x-1}=\frac{8-2}{6}=1$, $x-1=0$, $x=1$; $3^{x-1}=\frac{8+2}{6}=\frac{5}{3}$, $x-1=\log_3\frac{5}{3}$, $x=\log_3\frac{5}{3}+1=\log_3 5$.

Корень $x=1$ не принадлежит промежутку $(1;3)$; корень $x=\log_3 5$ принадлежит промежутку $(1;3)$ ($1<\log_3 5<2$).

Ответ: $\{1;\log_3 5\}$; $\{1;\log_3 5\}$

Задание 13. Решите уравнение…

1) $2^{2x}+2^x - 2=0$ 2) $3^{2x} - 2\cdot 3^x - 3=0$ 3) $9^x - 8\cdot 3^x -9=0$ 4) $100^x - 11\cdot 10^x+10=0$

Пример 26. Решить уравнение $10\cdot 2^x-4^x=16$.

Решение. Перепишем это уравнение в виде $10\cdot 2^x-2^{2x}-16=0$ и введем новую переменную $t=2^x$.

Получим квадратное уравнение относительно переменной t: $10t-t^2-16=0$, откуда $t_1=2$, $t_2=8$.

Этим значениям t соответствует два уравнения: $2^x=2$ и $2^x=8$, откуда $x=1$ и $x=3$.

Ответ: 1; 3

Задание 14. Решите уравнение…

1) $3\cdot 25^x-14\cdot 5^x-5=0$ 2) $8\cdot 4^x-15\cdot 2^x-2=0$

Решение однородных показательных уравнений

Уравнения вида $Aa^{2x}+Ba^xb^x+Cb^{2x}=0$, где $A\neq0$, $a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $b\neq0$, являются ***однородными***.

Путем деления обеих частей таких уравнений на $b^{2x}>0$ они сводятся к квадратным уравнениям вида $A\left(\frac{a}{b}\right)^{2x}+B\left(\frac{a}{b}\right)^{x}+C=0$.

Пример 27. Решите уравнение $2^{2x+1}-5\cdot6^x+3^{2x+1}=0$.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения:

$2\cdot2^{2x}-5\cdot2^x\cdot3^x+3\cdot3^{2x}=0$.

Разделим обе части полученного уравнения на 3^{2x}:

$2\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}-5\left(\frac{2}{3}\right)^{x}+3=0$. Пусть $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=t,\ t>0.$ Тогда $2t^2-5t+3=0$.

Корни этого уравнения $t_1=1$, $t_2=\frac{3}{2}$.

Исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений: $\left[\begin{array}{l}\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=1,\\ \left(\frac{2}{3}\right)^{x}=\frac{3}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=-1\end{array}\right.$.

Ответ: 0; - 1

Задание 15. Решите уравнение…

1) $4^{x+1}+4^{1-x}-10=0$

2) $3\cdot4^x+6^x-2\cdot9^x=0$

3) $15\cdot2^{x+1}+15\cdot2^{-x+2}=125$

4) $5\cdot9^x+2\cdot15^x-3\cdot25^x=0$

Метод почленного деления

Суть метода в почленном делении уравнения, члены которого представляют собой степени с одинаковыми показателями и различными основаниями на одну из степеней.

При этом удобнее делить на степень с большим показателем.

Пример 28. Решите уравнение $9^x+6^x=2\cdot4^x$.

Решение. Разделим обе части уравнения на $4^x \neq 0$, получим $\left(\frac{9}{4}\right)^x + \left(\frac{6}{4}\right)^x = 2$, $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{3}{2}\right)^x - 2 = 0$. Обозначим $\left(\frac{3}{2}\right)^x = y$, $y>0$, получим $y^2+y-2=0$; $y_1=-2$; $y_2=1$. -2 не удовлетворяет условию $y>0$. Имеем $\left(\frac{3}{2}\right)^x = 1$. $x=0$.

Ответ: 0

Задание 16. Решите уравнение…

1) $4^x + 6^x - 9^x = 0$

2) $2^{2x+1} - 5 \cdot 6^x + 3^{2x+1} = 0$

3) $3 \cdot 16^x + 37 \cdot 36^x = 26 \cdot 81^x$

4) $1 + 2^{\frac{x}{2}} = 2^x$

Логарифмирование

Уравнения вида $a^{f(x)}=b^{g(x)}$ ($a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $b\neq1$), где $f(x)$ и $g(x)$ – элементарные функции, решаются **логарифмированием** обеих частей.

Уравнения вида $a^{f(x)} = b$, где $a>0$, $a\neq1$ имеет решение, если b > 0. Его решают логарифмированием по основанию a: $\log_a a^{f(x)} = \log_a b$. Тогда $f(x) = \log_a b$.

Пример 29. Решить уравнение $3^{x-5} = 7$.

Решение. Прологарифмируем уравнение по основанию 3.

Получаем: $\log_3 3^{x-5} = \log_3 7$; $(x-5)\log_3 3 = \log_3 7$; $x - 5 = \log_3 7$; $x = \log_3 7 + 5$.

Ответ: $\log_3 7 + 5$

Задание 17. Решите уравнение…

1) $2^{3x+1} = 5$

2) $4^x = 6$

3) $2^{3x-1} = 13$

4) $8^{x-1} = 5$

Пример 30. Решите уравнение $8^x - 9 \cdot 2^{x+1} + 2^{5-x} = 0$; Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[\log_2 1; \log_2 2]$.

Решение. Умножим обе части уравнения на положительное выражение 2^x, получим: $4^{2x} - 18 \cdot 4^x + 32 = 0$, откуда $x = 0,5$ и $x = 2$.

$\log_2 1 = 0$, $\log_2 2 = 1$, значит, указанному промежутку принадлежит только корень $x = 0,5$.

Ответ: 0,5; 2 и 2; 0,5

Пример 31. Решите уравнение $2^{x+1} = 5^{2-x}$.

Решение. Поскольку $2^{x+1} > 0$ и $5^{2-x} > 0$ при любых значениях x, то можно прологарифмировать обе части данного уравнения, например, по основанию 2:

$\log_2 2^{x+1} = \log_2 5^{2-x}$; $(x+1)\log_2 2 = (2-x)\log_2 5$.

Далее раскроем скобки и выразим x: $x+1=(2-x)\log_2 5$, откуда $x+x\log_2 5=2\log_2 5-1$, $x=\frac{2\log_2 5-1}{1+\log_2 5}$.

Ответ: $\frac{2\log_2 5-1}{1+\log_2 5}$

Задание 18. Решите уравнение…

1) $2^{3x+1} = 5^{2-x}$ 2) $5^{x+1} = 8^{x+1}$ 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{1-x}$ 4) $2^{3x-5} = 3^{1-x}$

Показательно-степенные уравнения

Уравнения вида $f(x)^{y(x)} = f(x)^{h(x)}$ (переменная в основании и в показателе степени) называются ***показательно-степенными***.

Уравнения этого вида не являются ни показательными, ни степенными. Их корнями являются решения системы: $\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ y(x) = h(x) \end{cases}$, а также те значения x, для которых $f(x)=1$ (если при этих значениях определены функции $y(x)$ и $h(x)$), и те значения x, для которых $f(x)\leq 0$.

При этом, если $f(x)=0$, то $h(x)\in N$ и $y(x)\in N$; если $f(x)<0$, то $h(x)\in Z$ и $y(x)\in Z$.

Показательно-степенным уравнением называется уравнение, в котором неизвестная величина содержится и в основании степени, и в показателе.

Такие уравнения принято решать при условии, что основания степени положительны (ОДЗ уравнения).

I тип: уравнение вида $(f(x))^{g(x)} = (f(x))^{h(x)}$. Решение уравнения на ОДЗ сводится к решению совокупности $\left[\begin{array}{l} g(x) = h(x), \\ f(x) = 1. \end{array}\right.$

II тип: уравнение вида $(f(x))^{g(x)} = (h(x))^{g(x)}$. Решение уравнения на ОДЗ сводится к решению совокупности $\left[\begin{array}{l} f(x) = h(x), \\ g(x) = 0. \end{array}\right.$

Пример 32. Решить уравнение $(x+3)^{x^2-3} = (x+3)^{2x}$.

Решение. Проверим, какие из решений совокупности $\left[\begin{array}{l} x+3=-1, \\ x+3=0, \\ x+3=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4, \\ x=-3, \\ x=-2 \end{array}\right.$ являются корнями исходного уравнения. Проверка показывает, что подходит только *x*= - 2. Проверим, какие из корней уравнения $x^2-3=2x$ удовлетворяют исходному. Имеем *x*=3 или *x*= - 1. Оба корня подходят.

Ответ: - 2; - 1; 3

Задание 19. Решите уравнение…

1) $(x+2)^{x^2}=(x+2)^{3x-2}$ 2) $(x-2)^{x^2-2x}=(2-x)^{2-x}$

3) $(x+1)^{x^2+3x}=(x+1)^{10x-12}$

Уравнения с параметром

Пример 33. Найти все значения параметра *a*, при которых уравнение $4^x-a2^x-a+3=0$ имеет хотя бы одно решение.

Решение. Сделаем замену $2^x=t,\ t>0$. Тогда исходное уравнение примет вид $t^2-at-a+3=0$. Для того чтобы оно имело хотя бы одно решение, необходимо и достаточно, чтобы квадратный трехчлен имел хотя бы один положительный корень, значит дискриминант должен быть больше нуля.

Поскольку $D=a^2-4(3-a)=(a-2)(a+6)$, то условие *D*≥0 выполняется при *a*≥2 или *a*≤ - 6.

По теореме Виета, корни уравнения $t^2-at-a+3=0$ удовлетворяют системе уравнений $\left\{\begin{array}{l} t_1t_2=3-a, \\ t_1+t_2=a \end{array}\right.$.

При *a*≤ - 6 имеем $t_1t_2>0$, а $t_1+t_2<0$, поэтому оба корня отрицательны, и, следовательно, исходное уравнение решений не имеет.

При *a*≥2 имеем $t_1+t_2>0$, следовательно, хотя бы один из корней больше нуля.

Таким образом, уравнение имеет хотя бы одно решение при *a*≥2.

Ответ: [2; +∞)

Пример 34. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $4^x-a2^x-a+3=0$ имеет хотя бы одно решение.

Решение. Сделаем замену $2^x=t, t>0$. Тогда исходное уравнение примет вид $t^2-at-a+3=0$. Для того чтобы оно имело хотя бы одно решение, необходимо и достаточно, чтобы квадратный трехчлен имел хотя бы один положительный корень, значит дискриминант должен быть больше нуля.

Поскольку $D=a^2-4(3-a)=(a-2)(a+6)$, то условие $D\geq 0$ выполняется при $a\geq 2$ или $a\leq -6$.

По теореме Виета, корни уравнения $t^2-at-a+3=0$ удовлетворяют системе уравнений $\begin{cases} t_1t_2=3-a, \\ t_1+t_2=a \end{cases}$.

При $a\leq -6$ имеем $t_1t_2>0$, а $t_1+t_2<0$, поэтому оба корня отрицательны, и, следовательно, исходное уравнение решений не имеет.

При $a\geq 2$ имеем $t_1+t_2>0$, следовательно, хотя бы один из корней больше нуля. Таким образом, уравнение имеет хотя бы одно решение при $a\geq 2$.

Ответ: $[2;+\infty)$

Пример 35. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $2^x-a=\sqrt{4^x-3a}$ имеет единственный корень.

Решение. Пусть $2^x=t$. $t-a=\sqrt{t^2-3a}$; $\begin{cases} t\geq a, \\ t^2-3a=t^2-2at+a^2 \end{cases}$; $\begin{cases} t\geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} a-0, \\ t=\frac{1}{2}(a+3) \end{array}\right. \end{cases}$; $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=0, \\ t\geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{2}(a+3)\geq a, \\ t=\frac{1}{2}(a+3) \end{cases} \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=0, \\ t\geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} a\leq 3, \\ t=\frac{1}{2}(a+3) \end{cases} \end{array}\right.$.

Так как $t>0$, получаем если $a=0$, то $t>0$; если $-3<a\leq 3$, то $t=\frac{1}{2}(a+3)$. Поскольку при $a=0$ решением являются все положительные значения t, уравнение имеет единственное решение, если $a\in(-3;0)\cup(0;3]$

Ответ: $(-3;0)\cup(0;3]$

Задание 20. При каких значениях *a* уравнение…

1) $25^x+5^x\cdot(2-3a)+2a^2-5a-3=0$ имеет одно решение

2) $9^x-3^x\cdot(5a+3)+6a^2+11a-10=0$ имеет одно решение

Уравнения с дополнительными условиями

Пример 36. Найдите сумму корней уравнения $2^{x^2-3} \cdot 5^{x^2-3} = 0{,}01(10^{x-1})^3$.

Решение. Приведем левую и правую части уравнения к степени с основанием 10: $(2 \cdot 5)^{x^2-3} = 10^{-2} 10^{3x-3} \Rightarrow 10^{x^2-3} = 10^{3x-5}$.

Отсюда $x^2 - 3 = 3x - 5$; $x^2 - 3x + 2 = 0$; $x=1$ и $x=2$. Их сумма равна 3.

Ответ: 3

Задание 21. Найдите…

1) сумму корней уравнения $x^3 \cdot 3^{x-1} + 125 = 125 \cdot 3^{x-1} + x^3$

2) сумму корней уравнения $2^{2x^2} + 2^{x^2+x+2} = 2^{2x+5}$

3) произведение корней уравнения $4^{\sqrt{x+5}} + 4 = 2^{\sqrt{x^2+5x+2}} + 2^{\sqrt{x+5}}$

ТЕМА: Показательные неравенства.

Цель занятия:

Образовательная:

Ввести понятие показательного неравенства. Виды показательного неравенства. Научить решать показательные неравенства.

Развивающие:
Развитие логического мышления;

Перечень вопросов, рассматриваемых в теме

- простейшие показательные неравенства;
- решение показательных неравенств замена переменной, разложение на множители;
- метод рационализации при решении показательных неравенств;
- метод интервалов при решении показательных неравенств;
- графический метод решения показательных неравенств.

Определение: Показательным называется неравенство, в котором переменная входит только в показатели степеней, при постоянном основании.

Неравенства вида $a^{f(x)} \geq b$, $a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$ называются **простейшими показательными неравенствами**.

Метод рационализации для решения показательных неравенств – переход от неравенства, содержащего показательные выражения, к равносильному рациональному неравенству (или равносильной системе рациональных неравенств).

1. Рассмотрим показательные неравенства.

Показательным называется неравенство, в котором переменная входит только в показатели степеней, при постоянном основании.

Неравенства вида $a^{f(x)} \geq b$, $a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$ называются **простейшими показательными неравенствами**.

В самом простом случае неравенство принимает вид: $a^x > b$. Очевидно, что знак неравенства может быть любым (<, >, ≤, ≥).

Множество решения неравенства будет зависеть и от знака неравенства, и от основания степени, и от значения b.

Так как множество значений показательной функции $f(x) = a^x$ – множество положительных чисел, то
при $b \leq 0$ неравенства: $a^x < b$ и $a^x \leq b$ решений не имеют, независимо от значения основания *a*. В то же время множеством решения неравенств $a^x > b$ и $a^x \geq b$ является все множество действительных чисел, независимо от значения

основания *a*

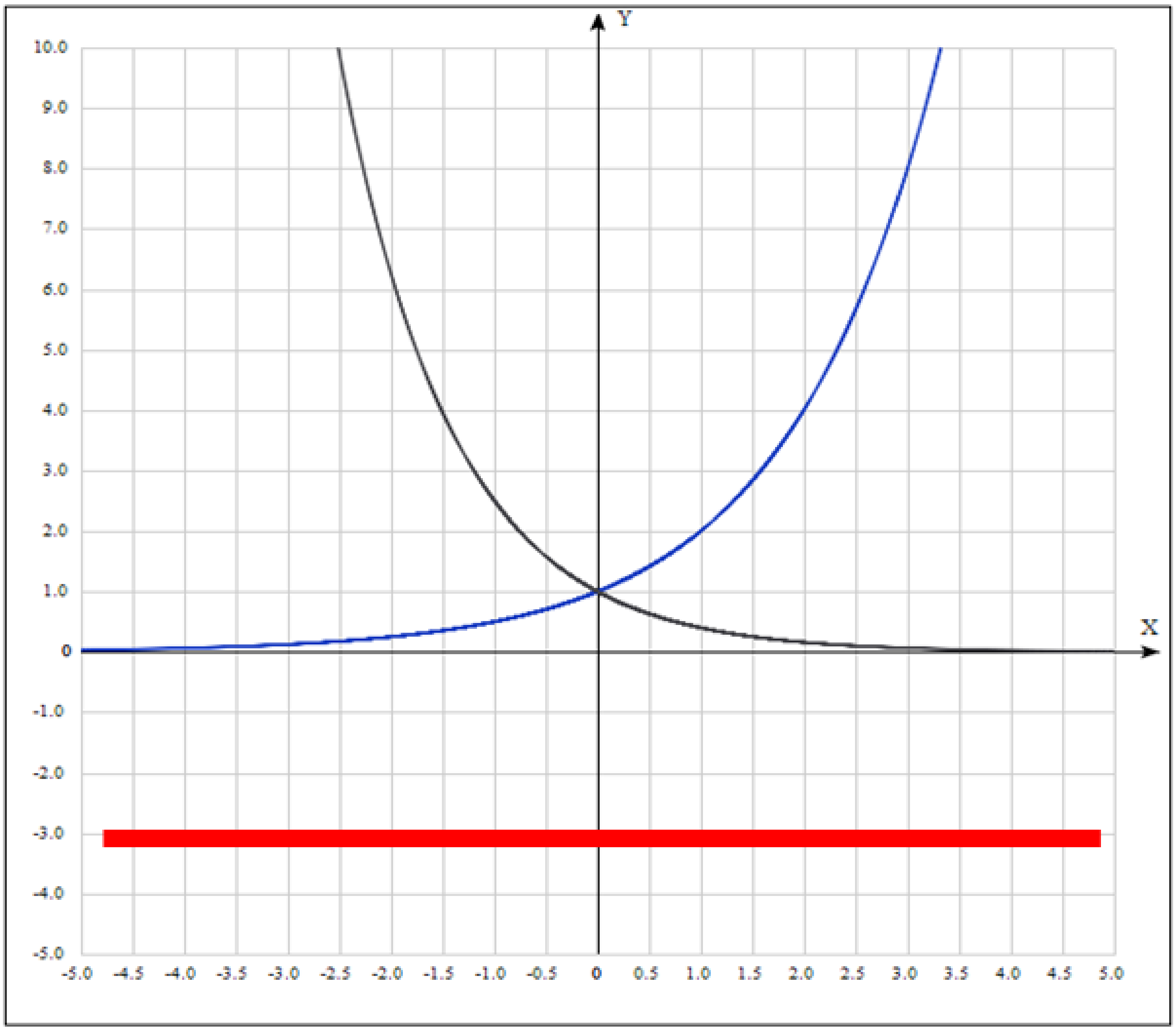
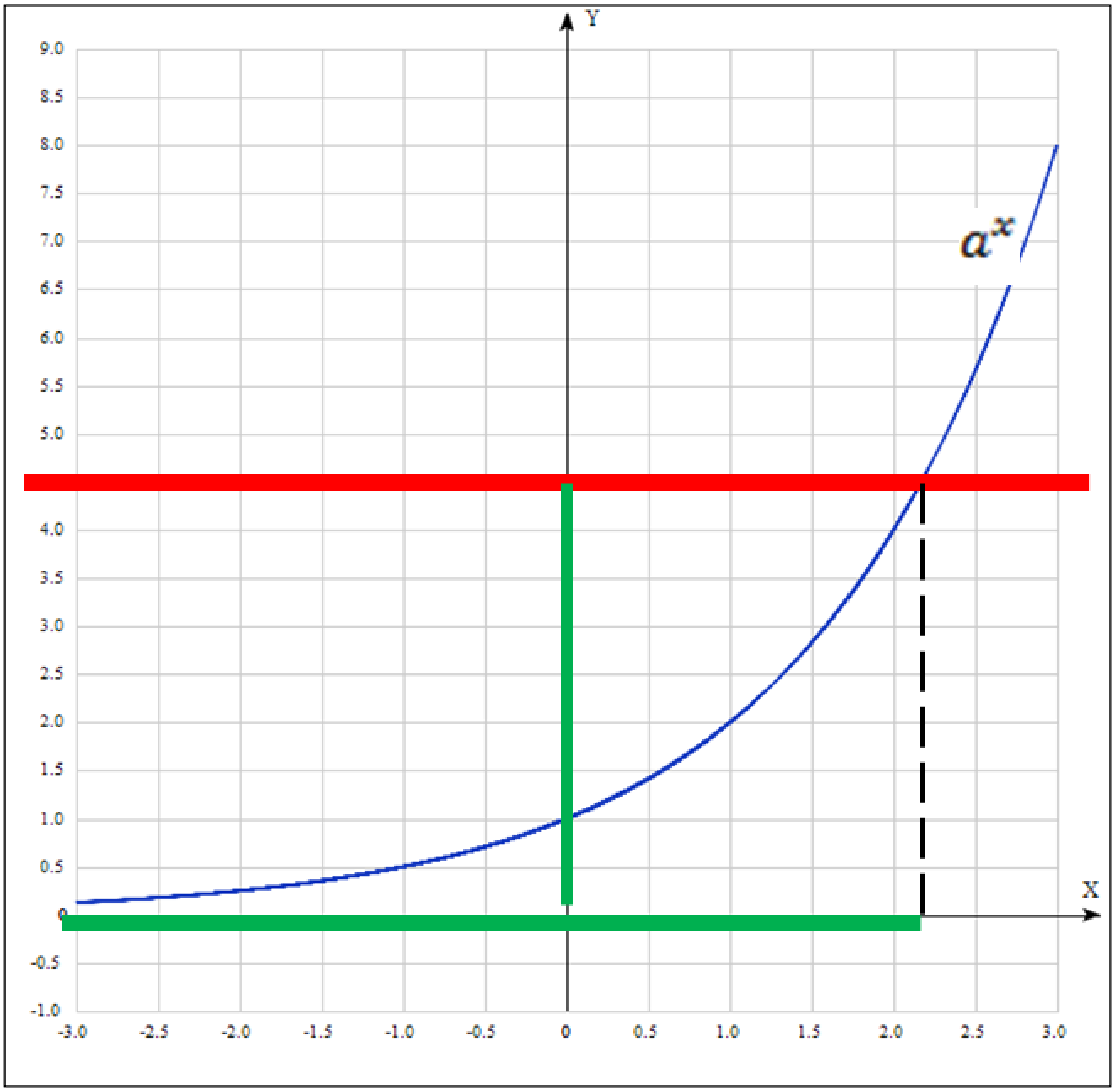


иллюстрация решения простейшего показательного неравенства при b<0

Теперь рассмотрим случай b>0, *a*>1.

В том случае, когда основание степени a>1, то при переходе от исходного неравенства к неравенству с показателями знак неравенства не изменяется– иллюстрация решения простейшего показательного неравенства $a^x < b$ или $a^x \leq b$ при b>0, *a*>1.



– иллюстрация решения простейшего показательного неравенства $a^x > b$ или $a^x \geq b$ при b>0, *a*>1.

Теперь рассмотрим случай b>0, 0<a<1.

В том случае, когда основание степени 0<a<1, то при переходе от исходного неравенства к неравенству с показателями знак неравенства изменяется на противоположный (см. Рисунки 4 и 5).

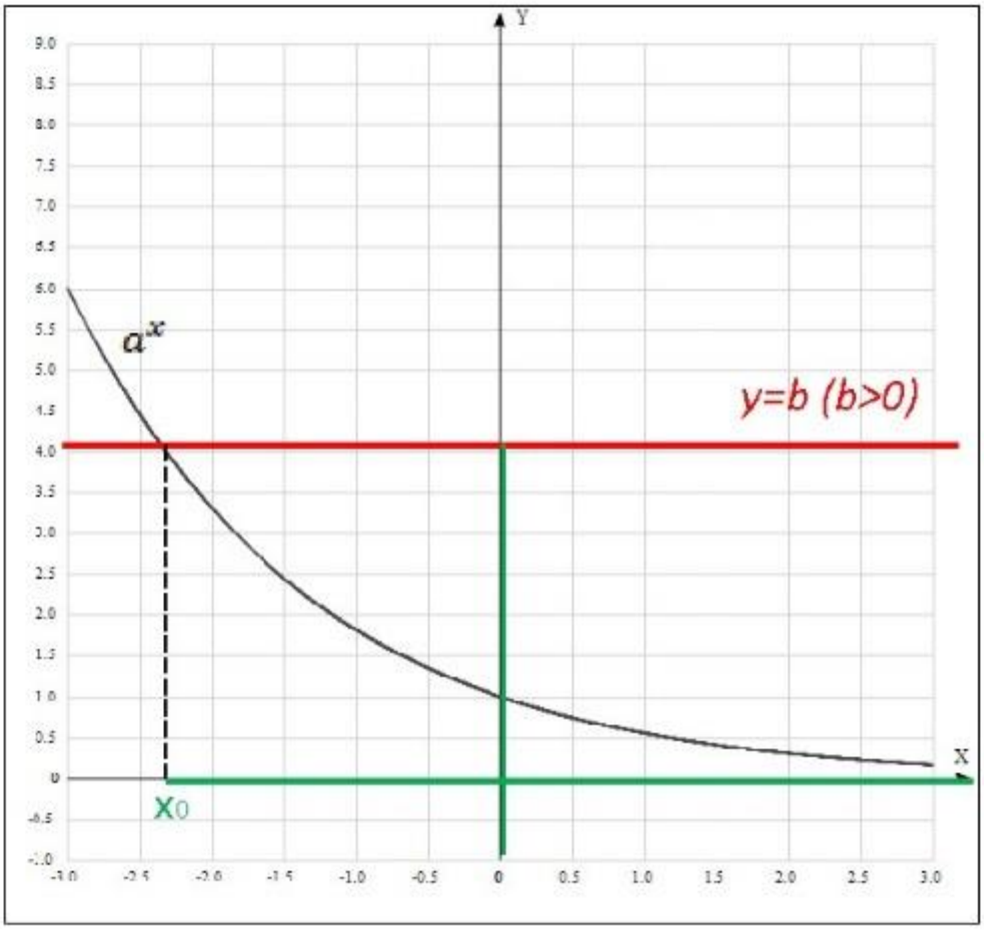


иллюстрация решения простейшего показательного неравенства $a^x < b$ или $a^x \leq b$ при b>0, 0<*a*<1.

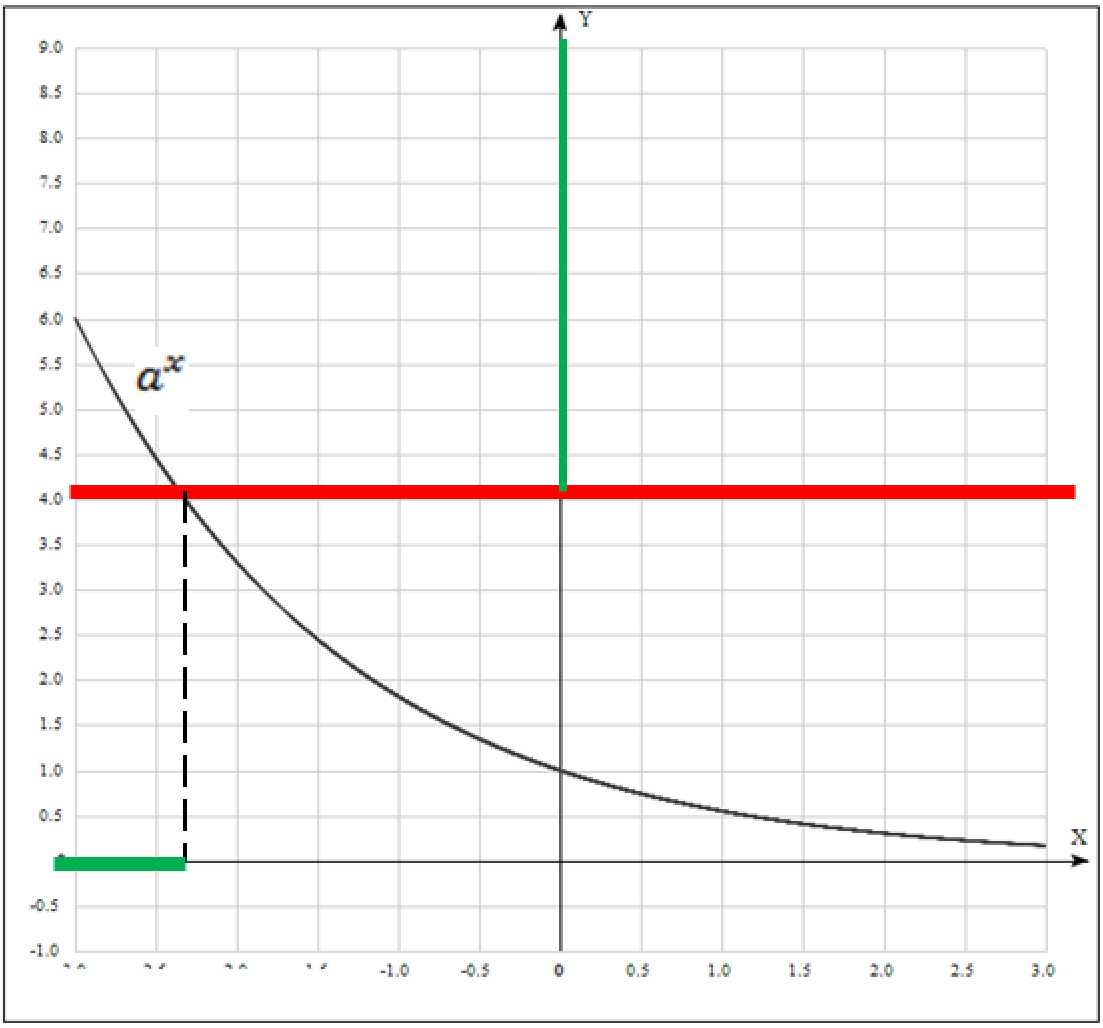


Рисунок 5 – иллюстрация решения простейшего показательного неравенства $a^x > b$ или $a^x \geq b$ при b>0, 0<*a*<1.

Для того чтобы решить простейшее показательное неравенство $a^x > b$, нужно число *b* представить в виде степени числа *a*.

Примеры решения неравеств.

1.решите неравество: $5^x > \sqrt[7]{125}$.

Представим $\sqrt[7]{125}$ в виде степени числа 5: $\sqrt[7]{125} = 5^{3/7}$.

Теперь перепишем данное неравенство в виде: $5^x > 5^{3/7}$.

Так как основание степени больше 1, то при переходе к показателям знак неравенства сохраняется, поэтому *x*>3/7.

Ответ: *x*>3/7.

2. решите неравенство: $(0{,}4)^{x^2-2x} \leq \frac{8}{125}$.

Перепишем его в виде

$(\frac{2}{5})^{x^2-2x} \leq \left(\frac{2}{5}\right)^3$.

Так как основание степени меньше 1, то при переходе к показателям знак неравенства изменяется на противоположный:

$x^2 - 2x \geq 3$,

$x^2 - 2x - 3 \geq 0$,

$\left\{\begin{matrix} x \leq -1 \\ x \geq 3 \end{matrix}\right.$. Ответ: $\left\{\begin{matrix} x \leq -1 \\ x \geq 3 \end{matrix}\right.$.

2. Теперь перейдем к решению более сложных показательных неравенств.

2.1) Рассмотрим пример: $3^{\frac{x+1}{x}} + 3^{\frac{1}{x}} \geq 12$.

Преобразуем показатель первого слагаемого: $3^{1+\frac{1}{x}} + 3^{\frac{1}{x}} \geq 12$.

Теперь в левой части вынесем за скобку общий множитель: $3^{\frac{1}{x}}(3+1) \geq 12$.

Разделим обе части неравенства на 4: $3^{\frac{1}{x}} \geq 3$. Получили простейшее показательное неравенство. Так как основание степени больше 1, то при переходе к показателям знак неравенства сохраняется, получаем: $\frac{1}{x} \geq 1$. Решение этого неравенства является полуинтервал (0; 1]. Ответ: (0; 1].

2.2) Рассмотрим еще один пример: $\left(\frac{1}{4}\right)^x - 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 16 > 0$.

Заметим, что $\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$, поэтому введем новую переменную $t = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Получим вспомогательное неравенство: $t^2 - 10t + 16 > 0$.

Решим его: $\left\{\begin{matrix} t > 8 \\ t < 2 \end{matrix}\right.$.

Вернемся к исходной переменной:

$\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x > 8 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x < 2 \end{cases}$, $\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \end{cases}$.

Так как основание степени меньше 1, то при переходе к показателям знак неравенства изменится на противоположный:

$\begin{cases} x > -1 \\ x < -3 \end{cases}$. Ответ: $\begin{cases} x > -1 \\ x < -3 \end{cases}$.

2.3) Рассмотрим еще одно показательное неравенство, которое решается методом замены переменной.

$\frac{1}{3^x - 1} + \frac{3^x}{3^{2x} - 1} < \frac{1}{3^x + 1}$.

Видим, что неравенство зависит от выражения 3^x, поэтому введем новую переменную $t = 3^x, t > 0$ и запишем вспомогательное неравенство: $\frac{1}{t-1} + \frac{t}{t^2 - 1} < \frac{1}{t+1}$.

Преобразуем полученное неравенство к виду: F(t)<0.

$\frac{1}{t-1} + \frac{t}{t^2 - 1} - \frac{1}{t+1} < 0$, приведем левую часть к общему знаменателю:

$\frac{t+1+t-t+1}{(t-1)(t+1)} < 0$, $\frac{t+2}{(t-1)(t+1)} < 0$. Так как $t > 0$, то $t + 2 > 0$ и $t + 1 > 0$, поэтому решение полученного неравенства сводится к: $t - 1 < 0$, то есть $t < 1$.

Вернемся к исходной переменной: $3^x < 1$, то есть x<0.Ответ: $(-\infty; 0)$

Примеры и разбор решения заданий

1. $\sqrt{25 - 5^x} > 5 - 5^x$.

Решение:

Введем новую переменную $t = 5^x$.

Запишем вспомогательное неравенство: $\sqrt{25 - t} > 5 - t$.

1) Если $5-t<0$, то решением неравенства является любое значение t, которое удовлетворяет области определения: $25-t\geq 0$.

Решив систему: $\begin{cases} 5-t<0 \\ 25-t\geq 0 \end{cases}$, получаем: $5<t\leq 25$.

2) Если $5-t\geq 0$ ($t\leq 5$), возведем обе части неравенства в квадрат:

$25-t>(5-t)^2$.

Решим его: $25-t>25-10t+t^2$,

$t^2-9t<0$,

$t(t-9)<0$,

0<t<9.

Учитывая условие $t\leq 5$, получаем: $0<t\leq 5$.

Таким образом, объединяя первый и второй случай, получаем решение иррационального вспомогательного неравенства:

$0<t\leq 25$.

Вернемся к исходной переменной:

$0<5^x\leq 25$. Так как $5^x>0$ всегда, то получаем: $5^x\leq 25$.

Учитывая, что основание степени больше 1, получаем:

$x\leq 2$ Ответ: $(-\infty;2]$.

2.Решите неравенство. $(x^2+x+1)^{\frac{x+5}{x+2}}-(x^2+x+1)^3\geq 0$,

Решение:

$(x^2+x+1)^{\frac{x+5}{x+2}}-(x^2+x+1)^3\geq 0$,

$(x^2+x+1-1)(\frac{x+5}{x+2}-3)\geq 0$.

Получили неравенство: $(x^2+x)(\frac{x+5-3x-6}{x+2})\geq 0$.

Упростим его и решим методом интервалов:

$(x^2+x)(\frac{-2x-1}{x+2}) \geq 0$,

$\frac{x(x+1)(2x+1)}{x+2} \leq 0$.

Запишем ответ: $(-2;\ -1] \cup [-0{,}5;0]$. Ответ: $(-2;\ -1] \cup [-0{,}5;0]$.

Решите неравенство:

1) $3^{x-2}>9$

$3^{x-2}>3^2,\ 3>1 \Rightarrow\ x-2>2,\ x>4$ *,Ответ:* $x>4$.

2)

2) $0{,}7^{x^2+2x}<0{,}7^3$

Т. к. $0<0{,}7<1 \Rightarrow x^2+2x>3$

$x^2+2x-3>0$

$x^2+2x-3=0$

$x_1=-3,\ x_2=1$

$(x+3)(x-1)>0$

$x<-3$ *и* $x>1$ *,Ответ:* $x\in(-\infty;-3$¿▯ $(1;+\infty)$

Системы показательных неравенств

Пример №1.

$$\begin{cases} 6^{2x-1}-\frac{1}{3}\cdot 6^x-4 \leq 0 \\ \left(\frac{9}{25}\right)^x \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{x-2} > \sqrt{\left(\frac{27}{125}\right)^x} \end{cases}$$

Правило: решаем каждое из неравенств по отдельности.

1) $6^{2x-1}-\frac{1}{3}\cdot 6^x-4 \leq 0 \ \mid \cdot 6$

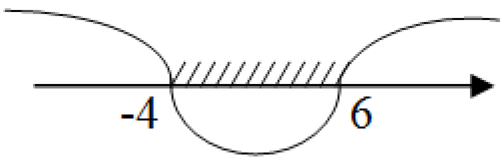
$6^1 \cdot 6^{2x-1} - 2 \cdot 6^x - 24 \le 0$

$6^{2x} - 2 \cdot 6^x - 24 \le 0$

Замена: $6^x = t$

$t^2 - 2t - 24 \le 0$

$t_1 = -4; t_2 = 6$



$-4 \le t \le 6$

Обратная замена:

$-4 \le 6^x \le 6$, $x \le 1$

2) $\left(\frac{9}{25}\right)^x \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{x-2} > \sqrt{\left(\frac{27}{125}\right)^x}$

$\left(\left(\frac{3}{5}\right)^2\right)^x \cdot \left(\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}\right)^{x-2} > \sqrt{\left(\left(\frac{3}{5}\right)^3\right)^x}$

$\left(\frac{3}{5}\right)^{2x-x+2} > \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^{3x}}$

$\left(\frac{3}{5}\right)^{x+2} > \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3x}{2}}$, $\left(\frac{3}{5} < 1\right)$

$x + 2 < \frac{3x}{2} \ | \cdot 2$, $2x + 4 < 3x$, $x > 4$

3) $\begin{cases} x \le 1 \\ x > 4 \end{cases}$

4) Ответ: решений нет.

Тема занятия: ***Логарифмы и их свойства. Преобразование логарифмических выражений.***

Цели занятия:

1. Образовательные:

- ввести понятие логарифма;
- изучить основные свойства логарифмов;
- способствовать формированию умения применять свойства логарифмов при решении заданий.

2. Развивающие:

- развитие математического мышления;
- развитие техники вычисления;
- развитие умение логически мыслить и рационально работать;
- способствовать развитию у обучающихся навыков самоконтроля

Студентам предлагается определить тему лекции, решив уравнения:

Решите уравнения: $2^x = \sqrt[3]{4}$; $5^x = 25$; $3^x = \sqrt{3}$; $2^x = \frac{1}{4}$; $7^x = \frac{1}{7}$.

Ответы: $\frac{2}{3}$; 2;$\frac{1}{3}$;-2;-1.

А теперь решим следующие уравнения: $2^x = 0$; $5^x = -1$; $4^x = 5$.

Анализируя ответы студентов, приходим к выводу, что первые два уравнения не имеют решения, так как невозможно найти показатель степени, возведя в который можно получить 0 или отрицательное число. Последнее уравнение имеет решение, но мы не знаем в какую степень нужно возвести число 4, чтобы получить 5. Ответ данного уравнения мы можем записать с помощью нового понятия. Это понятие **«логарифм».** Тема лекции: «Логарифмы и их свойства. Преобразование логарифмических выражений».

План нашей лекции следующий:

1. Логарифм. Логарифм числа. Основное логарифмическое тождество.
2. Правила действий с логарифмами. Переход к новому основанию.
3. Десятичные и натуральные логарифмы.
4. Преобразование логарифмических выражений

1. Логарифм. Логарифм числа. Основное логарифмическое тождество.

Вернемся к уравнению $a^x = b$, где $a > 0$ и $a \neq 1$. Это уравнение не имеет решений при $b \leq 0$ и имеет единственный корень при $b > 0$. Этот корень называется логарифмом b по основанию a и обозначается $\log_a b$

<u>Определение</u>: Логарифмом положительного числа b по основанию a, где a>0,

a ≠ 1 называется показатель степени, в которую надо возвести a, чтобы получить число b.

Логарифмы были введены шотландским математиком Джоном Непером (1550-1617) и математиком Иостом Бюрги (1552-1632).

Бюрги пришел к логарифмам раньше, но опубликовал свои таблицы с опозданием (в 1620г.), а первой в 1614г. появилась работа Непера «Описание удивительной таблицы логарифмов».

С точки зрения вычислительной практики, изобретение логарифмов по возможности можно смело поставить рядом с другими, более древним великим изобретением индусов – нашей десятичной системы нумерации.

Через десяток лет после появления логарифмов Непера английский ученый Гунтер изобрел очень популярный прежде счетный прибор – логарифмическую линейку.

Она помогала астрономам и инженерам при вычислениях, она позволяла быстро получать ответ с достаточной точностью в три значащие цифры. Теперь ее вытеснили калькуляторы, но без логарифмической линейки не были бы построены ни первые компьютеры, ни микрокалькуляторы.

Логарифмирование – это действие нахождения логарифма числа.

*Пример№1:*Найти значение выражения

$\log_2 32 = 5$ (2^5 =32); $\log_5 0{,}04 = -2$ (0,04=1/25, 5^{-2}=1\25)

Основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a b} = b \ \left(b > 0, a > \mathbf{0} \ \boldsymbol{u} \ \boldsymbol{a} \neq \mathbf{1}\right)$$

$4^{log_4 5} = 5$ (Читают: 4 в степени логарифм 5 по основанию 4 равен 5)

$\left(\frac{1}{3}\right)^{log_{\frac{1}{3}} 6} = 6$ (Читают: одна треть в степени логарифм 6 по основанию одна треть равен 6)

Пример № 2: $2^{\log_2 5} = 5$, $5^{1+\log_5 3} = 5 * 5^{\log_5 3} = 15$

Пример№3 Вычислить $3^{-2log_3 5}$.

Решение. Для вычисления воспользуемся свойствами степеней:
1) $(a^n)^m = a^{nm}$, 2) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ и основным логарифмическим тождеством: $a^{log_a b} = b$.

$3^{-2log_3 5} = \left(3^{log_3 5}\right)^{-2} = 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$.

2. Основные свойства логарифмов.
При работе с логарифмами применяются их следующие свойства. При любом
$a > 0$ $(a \neq 1)$ при любых положительных x и y выполнены равенства:

1. $\log_a 1 = 0$.

2. $\log_a a = 1$.

3. Логарифм произведения чисел x и y по основанию a равен сумме логарифма x по основанию a и логарифма y по основанию a

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y.$$

.

4. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

5. $\log_a x^p = p * \log_a x$**,** для любого действительного p.

Основные свойства логарифмов широко применяются в ходе преобразования выражений, содержащих логарифмы.

6. *Формула перехода к новому основанию:*

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \quad (x > 0, a > 0 \text{ и } a \neq 1, b > 0 \text{ и } b \neq 1$$

С помощью формулы перехода можно найти значение логарифма с произвольным основанием, имея таблицы логарифмов, составленных для какого-нибудь одного основания b. Наиболее употребительны таблицы десятичных и натуральных логарифмов.

3. Десятичные и натуральные логарифмы.
В математике принято следующее сокращение:
$\log_{10}$ a= lg a- десятичный логарифм числа a (буква «o» пропускается, а основание 10 не ставят).
$\log_e$ a= ln a - натуральный логарифм числа a. «e» - это такое иррациональное число, равное 2,7 (буква «o» пропускается, а основание «e» не ставят).
Рассмотрим примеры:
lg 10=1; lg 1=0

ln e=1 ; ln 1=0 .

Формула 6 потребуется при вычислении логарифма по калькулятору. Возьмем пример: log3 7 = lg7 / lg3. В калькуляторе можно вычислить только десятичный и натуральный логарифм. Вводим цифру 7 и нажмем кнопку «лог», также вводим цифру 3 и нажмем кнопку «лог», делим верхнее значение на нижнее и получаем ответ.

4. Преобразование логарифмических выражений

$$\lg 8 + \lg 125 = \lg 1000 = 3$$

Пример 3: Вычислите

$$\log_2 7 - \log_2 \frac{7}{16} = \log_2 16 = 4$$

Пример 4:

$$\frac{\lg 8 + \lg 18}{2\lg 2 + \lg 3} = \frac{\lg 144}{\lg 12} = 2$$

Пример5:

$$\log_6 x = 3\log_6 2 + 0{,}5\log_6 25 - 2\log_6 3$$

Пример 6:Найдите х:

$$\log_6 x = \log_6 8 + \log_6 5 - \log_2 9$$

$$\log_6 x = \log_6 40 - \log_2 9 = \log_6 \frac{40}{9}$$

X=40\9

5. Подведение итогов занятия.

1. Вопросы студентам:
   1. Что нового мы сегодня узнали?
   2. Что называется логарифмом?
   3. Перечислите основные свойства логарифмов?
   4. Работа по карточкам с целью формирования навыков вычисления логарифма.

5. **Домашнее задание.** Конспект лекции.

Вычислите логарифмы:

$\log_3 27$	$\log_9 81$	$\log_5 25$	$\log_5 125$
$\log_5 \frac{1}{5}$	$\log_5 \frac{1}{25}$	$\log_4 64$	$\log_{0,3} 1$
$\log_2 64$	$\log_4 4$	$\log_3 \frac{1}{9}$	$\lg 100$

Вычислите

1. $\left(2^{log_2 15} + 3\right)^{log_{18} 28} : log_2 128$
2. $\left(log_{37} 5 + log_{37} 7{,}4 - 4^{log_2 5}\right) : log_{\frac{1}{3}} 81$
3. $\dfrac{log_{0,7} 64}{log_{0,7} 22 - log_{0,7} 44}$

4. $log_2(log_3 \sqrt[16]{3})$

ТЕМА: Логарифмические уравнения и методы их решения.
Цель занятия:
Ввести понятие логарифмического уравнения.
виды логарифмических уравнении.
Методы решения логарифмических уравнении.

Определение: **Логарифмом** положительного числа b по основанию a, где $a > 0$, $a \neq 1$, называется показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить b.
Обозначают: $\log_a b$.

Таким образом, равенство $\log_a b = c$ означает, что $a^c = b$.

Вспомним также **свойства логарифмов**. Пусть $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, а r – любое действительное число. Тогда справедливы следующие свойства:

1. $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$,
2. $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$,
3. $\log_a b^r = r\log_a b$.

Так какие же уравнения называют логарифмическими?

Определение: Логарифмическим уравнением называют уравнение, содержащее переменные под знаком логарифма и (или) в его основании.
Существуют различные методы решения логарифмических уравнений.

В первую очередь рассмотрим с вами **решение логарифмических уравнений по определению логарифма**.
Так решаются уравнения вида $\log_a f(x) = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$.
Они равносильны уравнению $f(x) = a^b$. При этом, так как выражение под знаком логарифма должно принимать только положительные значения, должно выполняться условие $f(x) > 0$.

Пример1:
Решим уравнение: $\log_2(x^2 - 3x) = 2$. Сразу отметим, что должно выполняться условие $x^2 - 3x > 0$. Воспользуемся определением логарифма и запишем: $x^2 - 3x = 2^2$. Теперь возведём 2 в квадрат. Перенесём 4 в левую часть уравнения и получим квадратное уравнение: $x^2 - 3x = 4$. Решим его X1=4; X2=-1

Мы будем проверять, удовлетворяют ли найденные значения икс условию $x^2 - 3x > 0$?

Обязательно проверим, удовлетворяют ли найденные корни условию. Подставляем 4 в неравенство: $4^2 - 3 \cdot 4 = 4 > 0$. Получаем верное неравенство. Затем подставляем в неравенство -1: $(-1)^2 - 3 \cdot (-1) = 4 > 0$. И тоже получаем верное неравенство.

А значит, и 4, и -1 являются корнями логарифмического уравнения.

Следующий метод – **метод потенцирования**.

Определение. Потенцированием называют действие нахождения числа по его логарифму.

При решении логарифмических уравнений под потенцированием понимается переход от равенства, содержащего логарифмы, к равенству, не содержащему их. Метод заключается в том, что мы от уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, где $a > 0$, $a \neq 1$, переходим к уравнению $f(x) = g(x)$. Причём должны выполняться условия $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$.

Пример 2:

Решим следующее уравнение: $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 3x - 4) = \log_{\frac{1}{3}}(2x + 2)$.

Следует отметить, что должны выполняться условия: $x^2 + 3x - 4 > 0$ и $2x + 2 > 0$. Потенцируем уравнение (то есть избавимся от знаков логарифма) и получаем: $x^2 + 3x - 4 = 2x + 2$. Перенесём $2x$ и 2 в левую часть уравнения и приведём подобные слагаемые: $x^2 + x - 6 = 0$. Решим полученное квадратное уравнение. Запишем его дискриминант: . Находим корни и   X1=2; X2=-3

Теперь проверим, удовлетворяют ли найденные корни условиям. Подставляем первый корень в первое неравенство и выполняем преобразования: $2^2 + 3 \cdot 2 - 4 = 6 > 0$. Затем подставляем во второе неравенство и тоже выполняем преобразования: $2 \cdot 2 + 2 = 6 > 0$. Получаем, что $x_1 = 2$ удовлетворяет каждому из неравенств, а значит, является корнем исходного логарифмического уравнения.

Затем подставляем второй корень в первое неравенство, выполняем преобразования и получаем: $(-3)^2 + \ 3 \cdot (-3) - 4 = -4 < 0$. Следовательно, $x_2 = -3$ не удовлетворяет первому неравенству, а значит, не является корнем данного логарифмического уравнения.

В ответ запишем: $x = 2$.

Следующий метод решения логарифмических уравнений – это **метод введения новой переменной**.

Посмотрите на уравнение $\log_2^2 x + 6 \log_2 x - 7 = 0$. Здесь переменная x может принимать только положительные значения.

Так это же квадратное уравнение относительно логарифма икс по основанию два. Давайте введём новую переменную $t = \log_2 x$. Тогда наше уравнение примет вид: $t^2 + 6t - 7 = 0$. Находим корни этого квадратного уравнения по теореме Виета. Тогда, согласно этой теореме, можем записать, что $t_1 + t_2 = -6$, а $t_1 t_2 = -7$. Легко увидеть, что этим равенствам удовлетворяют значения: $t_1 = -7$ и $t_2 = 1$.

Теперь можем вернуться к замене? Да, теперь мы вернёмся к замене.
Имеем: $\log_2 x = -7$ и $\log_2 x = 1$. Таким образом, по определению логарифма из первого равенства получаем $x_1 = 2^{-7} = \frac{1}{128}$, а из второго – $x_2 = 2^1 = 2$. Найденные значения икс больше нуля, а значит, каждое из них является корнем исходного логарифмического уравнения.

Таким образом мы с вами рассмотрели основные методы решения логарифмических уравнений.

Метод логарифмирования. Данный метод является «обратным» методу потенцирования, т. е. мы от уравнения без логарифмов переходим к уравнению, их содержащему.

$f(x) = g(x) \Rightarrow \log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x)$, при этом $f(x) > 0, g(x) > 0, h(x) > 0, h(x) \neq 1.$

Этот метод обычно используется, если в уравнении есть показательные функции, логарифмы – в показателе. То есть берётся логарифм от правой и левой частей уравнения.

Рассмотрим этот метод на примере.

Пример 10: $x^{\log_3 x - 4} = \frac{1}{27}$,

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 3:

$\log_3(x^{\log_3 x - 4}) = \log_3 \frac{1}{27}$, а теперь воспользуемся свойством логарифмов $\log_c a^p = p \log_c a$, получим

$(\log_3 x - 4)\log_3 x = -3.$

Выполним подстановку $t = \log_3 x$, получим уравнение

$(t-4)t = -3,$

$t^2 - 4t + 3 = 0,$

$t_1 = 1, t_2 = 3.$

Значит, $\log_3 x = 1$ или $\log_3 x = 3$,.

$x = 3^1, \ x = 3^3,$

$x = 3. \ x = 27.$

Оба числа удовлетворяют ОДЗ.

Ответ: 3, 27.

Задание 1:

Решить уравнение $\log_x(5x+6)=2.$

Решение:

$$\log_x(5x+6)=2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 5x+6, \\ x>0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x=-1 \text{ или } x=6), \\ x>0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=6.$$

Ответ: 6.

Задание2. Решите уравнения: а) $\log_3(x+1)+\log_3(x+3)=1$; б) $\log_4 2x = 1+\log_4(2x-3)$; в) $\log_3 x - 6\log_x 3 = 1$.

Решение.

а) $\log_3(x+1)+\log_3(x+3)=1,$

$\log_3\big((x+1)(x+3)\big)=1,$

$x+1>0,\ x+3>0,$

$(x+1)(x+3)=3^1,$

$x^2+3x+x+3=3,$

$x^2+3x+x+3-3=0,$

$x^2+4x=0,$

$x(x+4)=0,$

$x_1=0,\ x_2=-4,$

$x_1=0$: $0+1=1>0,$

$0+3=3>0,$

$x_2=-4$: $-4+1=-3<0,$

$-4+3=-1<0.$

Ответ: $x=0.$

б) $\log_4 2x = 1 + \log_4(2x-3)$,

$\log_4 2x = \log_4 4 + \log_4(2x-3)$,

$\log_4 2x = \log_4(4(2x-3))$,

$2x > 0,\ 2x-3 > 0$,

$2x = 4(2x-3)$,

$2x = 8x - 12$,

$-6x = -12$, $\qquad 2\cdot 2 = 4 > 0$,

$x = 2$, $\qquad 2\cdot 2 - 3 = 1 > 0$.

Ответ: $x = 2$.

в). *log_6^2 x + log_6 x -2 = 0,*

Заменим *log_6 x = t, где x больше нуля.*

t^2 + t -2 =0; D = 9; *t_1* =1, *t_2* = -2. Вернёмся к замене: *log_6 x = 1*, *x* = 6

log_6 x = -2, *x* = 1/36

Ответ: 6; 1/36.

Задания для самостоятельной работы. Решите уравнения:

1. $\log_{x+1}(2x^2+1) = 2$,

2. $\log_2(x^2+7x-5) = \log_2(4x-1)$,

3. $\log_3^2 x - \log_3 x = 2$.

4. $\log_7 x - \log_x 7 = 2{,}5$.

Тема: Радианная мера угла.

Цели занятия:

Образовательная:

Ввести понятие радианной меры угла, поворота точки вокруг начало координат. Научить переводить градусы в радианы и наоборот.

Развивающая:

развитие математического мышления;
развитие техники вычисления;
развитие умение логически мыслить и рационально работать;
способствовать развитию у обучающихся навыков самоконтроля

Воспитательная: создать условия для воспитания интереса к изучаемой теме, положительного отношения к знаниям, воспитание дисциплинированности

Угол в 1 ° **- это угол, который опишет начальный радиус, совершив часть полного оборота вокруг своей начальной точки против часовой стрелки.**

Рассмотрим еще одну единицу измерения величины угла – ***1 радиан.***

Угол в 1 радиан **есть центральный угол, опирающийся на такую дугу окружности, длина которой равна радиусу этой окружности (Рис.2)**

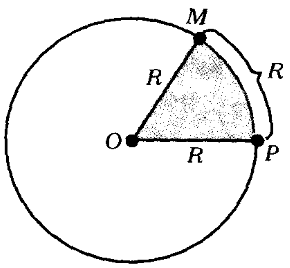


Рис.2

Если начальный радиус совершит полный оборот, то получится угол равный 360 ° или 2 π радианам.

Радианная мера 1° равна $\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$ т.е **1 ° =** $\frac{\pi}{180}$ **рад.**

Если угол содержит α градусов, то его радианная мера равна:

$\alpha° = \frac{\pi}{180}\alpha$ **рад.**

Найдем градусную меру угла в 1 радиан. Так как дуга длиной πR (полуокружность) стягивает центральный угол в 180°, то дуга длиной Rстягивает угол в π раз меньший, т.е

1 рад = $\left(\frac{180}{\pi}\right)^0$

α рад = $\left(\frac{180}{\pi}\right)^0$

Так как $\pi \approx 3{,}14$, то 1 рад $\approx 57{,}3°$ Если угол содержит радиан α, то его градусная мера равна

Задача №1 Найти градусную меру угла, равного: π рад; $\frac{\pi}{2}$ рад

Решение: π рад = $\left(\frac{180}{\pi}\pi\right)^0$ = 180 ° $\frac{\pi}{2}$ рад = $\left(\frac{180}{\pi}\frac{\pi}{2}\right)^0$ = 90 °

Задача №2 Найти радианную меру угла, равного: 45 °; 15 °

Решение: 45° = $\frac{\pi}{180}45$ рад = $\frac{\pi}{4}$ рад; 15 ° = $\frac{\pi}{180}15$ рад = $\frac{\pi}{12}$ рад.

Обычно при обозначении меры угла в радианах наименование «рад» опускают.

Радианная мера угла удобна для вычисления длины дуги окружности. Так как угол в 1 рад стягивает дугу, длина которой равна радиусу R, то угол в α рад стягивает дугу длиной l = αR. Площадь кругового сектора радиуса R, образованного углом в α рад, равна

S = $\frac{R^2\alpha}{2}$ **, где 0 < α < π.**

Упражнения для самостоятельного решения:

1°. Найти радианную меру угла, выраженную в градусах:

а) 40°; б) 120°; в) 150°; г) 32° .

2° . Найти градусную меру угла, выраженного в радианах: а) $\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{\pi}{9}$; в) $\frac{3\pi}{4}$; г) 3.

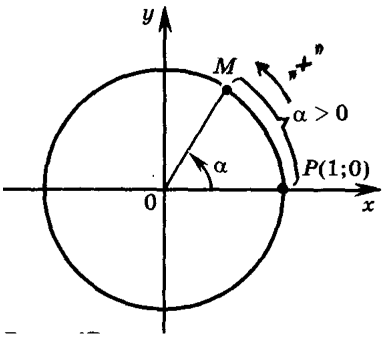
ПОВОРОТ ТОЧКИ ВОКРУГ НАЧАЛА КООРДИНАТ

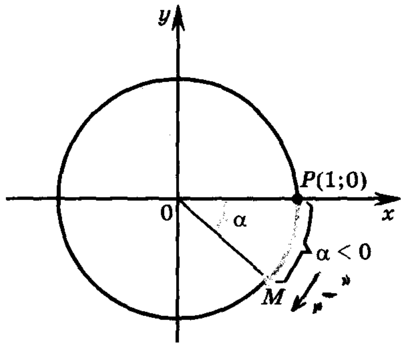
Покажем, как можно установить соответствие между действительными числами и точками окружности с помощью поворота точки окружности. Рассмотрим на координатной плоскости окружность радиуса R = 1 с центром в начале координат. Её называют ***единичной окружностью.***

Введем понятие поворота точки единичной окружности вокруг начала координат на угол α рад, где α – любое действительное число.

1. Пусть α > 0. Предположим, что точка Р (1;0), двигаясь по единичной окружности против часовой стрелки, прошла путь длиной α (рис.3). Конечную точку пути обозначим М.

В этом случае говорят, что точка М получена поворотом из точки Р поворотом вокруг начала координат на угол α рад.





2. Пусть α < 0. В этом случае говорят, что поворот на угол α совершался по часовой стрелке, и точка прошла путь длиной $|\alpha|$ (рис.4).

Примеры:

1) При повороте точки Р (1;0) на угол $\frac{\pi}{2}$ рад (рис.5) получается точка М (0;1).

2) Повернув точку Р(1;0) на угол - $\frac{\pi}{2}$ рад (рис.5) получается точка N(0; - 1).

3) Повернув точку Р (1;0) на угол $\frac{3\pi}{2}$ рад (рис.6) получается точка K (0; - 1).

4) Повернув точку Р(1;0) на угол $-\pi$ рад (рис.6) получается точка L (- 1; 0).

В курсе геометрии рассматривались углы от 0° до 180°. Используя поворот точки единичной окружности вокруг начала координат, можно рассматривать углы, большие 180°, а также отрицательные углы. Угол поворота можно задавать как в градусах, так и в радианах. ***Например,*** поворот точки Р(1;0) на угол $\frac{3\pi}{2}$ означает тоже самое, что и поворот точки на 270°; поворот на - $\frac{\pi}{2}$ - это поворот на -90°.

Рассмотрим примеры поворотов точки на угол, больший 2π, и на угол, меньший - 2π.

Так при повороте на угол $\frac{9\pi}{2} = 2\cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}$ точка совершает два полных оборота ($2\cdot 2\pi$) против часовой стрелки и еще проходит путь $\frac{\pi}{2}$ (рис.7).

При повороте на угол - $\frac{9\pi}{2}$ = - $2\cdot 2\pi$ - $\frac{\pi}{2}$ точка совершает два полных оборота по часовой стрелке и еще проходит путь $\frac{\pi}{2}$ в том же направлении (рис.8). Заметим, что при повороте точки Р (1;0) на угол $\frac{9\pi}{2}$ получается та же самая точка, что и при повороте на угол $\frac{\pi}{2}$. При повороте точки Р (1;0) на угол - $\frac{9\pi}{2}$ получается та же самая точка, что и при повороте на угол $-\frac{\pi}{2}$.

Если α = $\alpha_0 + 2\pi k$, где k – целое число, то при повороте на угол α получается та же самая точка, что и при повороте на угол α_0.

Задача №1 Найти координаты точки, полученной поворотом точки Р (1;0) на угол:

1) 7π; 2) $-\frac{7\pi}{2}$.

Решение: 1) Так как $7\pi = 3 \cdot 2\pi + \pi$, то при повороте на 7π получается та же самая точка, что и при повороте на π, т.е. получается точка с координатами (- 1; 0). (рис.9)

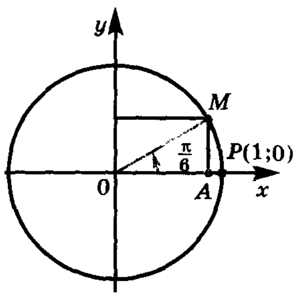
2) Так как $-\frac{7\pi}{2}$ = -2π - $\frac{3\pi}{2}$, то при повороте на $-\frac{7\pi}{2}$ получается та же самая точка, что и при повороте на - $\frac{3\pi}{2}$, т.е. получается точка с координатами (0; 1)

Задача № 2 Записать все углы, на которые нужно повернуть точку (1;0), чтобы получить точку

N $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Решение: Из прямоугольного треугольника AON (рис.11) следует, что угол AON равен $\frac{\pi}{6}$, т.е. один

из возможных углов поворота равен $\frac{\pi}{6}$. Следовательно, все углы, на которые нужно повернуть точку (1;0), чтобы получить точку $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$, выражаются так: $\frac{\pi}{6}$ + 2πk, где k – любое целое число.



Упражнения для самостоятельного решения:

1°. На единичной окружности построить точку, полученную поворотом точки (1;0) на заданный угол:

а) 4π; б) - 225°; в) - $\frac{\pi}{3}$; г) - $\frac{5\pi}{4}$; д) $\frac{\pi}{4} \pm 2\pi$; е) $-\frac{3\pi}{4} \pm 8\pi$.

2°. Найти координаты точки, полученной поворотом точки P(1;0) на угол:

а) 3π; б) - $\frac{15\pi}{2}$; в) 50°; г) 810°; д) $-\frac{3\pi}{2} + 2\pi k$, k – целое число; е) $-\frac{\pi}{2} \pm \pi$.

3°. Определить четверть, в которой расположена точка, полученная поворотом точки P(1;0) на угол:

а) 1; б) 2,75; в) 3,16; г) 4,95.

4*. На единичной окружности построить точку, полученную поворотом точки P(1;0) на угол:

а) $\frac{\pi}{4} \pm 2\pi$; б) $-\frac{\pi}{3} \pm 2\pi$; в) $4{,}5\pi$; г) - 7π.

5*. Найти координаты точки, полученной поворотом точки P (1;0) на угол (k – целое число):

а) $\frac{5\pi}{2} + 2\pi k$; б) $-\frac{9\pi}{2} + 2\pi k$; в) $-\frac{7\pi}{2} + 2\pi k$; г) $\frac{3\pi}{2} + 2\pi k$.

6*. Записать все углы, на которые нужно повернуть точку P (1;0), чтобы получить точку с координатами:

а) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$; б) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; в) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; г) $\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

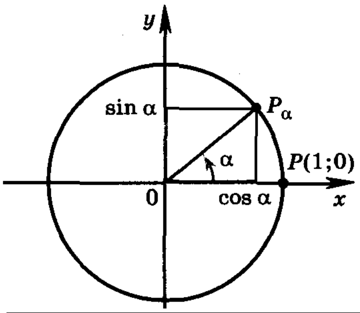
Тема: ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИНУСА, КОСИНУСА УГЛА

Цель занятия:

Образовательная:

Ввести понятие синуса, косинуса, тангенса, котангенса угла через единичную окружность, связь декартовых координат точки с углом поворота точки (1;0) вокруг начало координат.

Воспитательная: создать условия для воспитания интереса к изучаемой теме, положительного отношения к знаниям, воспитание дисциплинированности.



Синусом угла α называется **ордината** точки, полученной поворотом точки (1;0) вокруг начала координат на угол *α* (обозначается **sin α**).(рис.12)

Косинусом угла α называется **абсцисса** точки, полученной поворотом точки (1;0) вокруг начала координат на угол *α* **(**рис.12*)* (обозначается **cos α**).

В этих определениях угол *α* может выражаться как в градусах, так и в радианах.

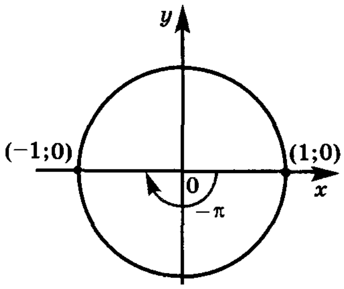
Например, при повороте точки (1;0) на угол $\frac{\pi}{2}$, т.е. угол 90°, получается точка (0;1).

Ордината точки (**<u>0</u>**;**1**) равна **1**, поэтому sin $\frac{\pi}{2}$ = sin 90° = 1; абсцисса этой точки, равна **<u>0</u>**, поэтому cos $\frac{\pi}{2}$ = cos 90° = 0

<u>Задача №1</u> Найти sin (- π) и cos (- π).

Решение:

Точка (1;0) при повороте на угол – π перейдет в точку (-1; 0) (рис.13), следовательно, sin (- π) = 0, cos (- π) = - 1.



<u>Задача №2</u> Решить уравнение sin x = 0.

Решение: Решить уравнение sin x = 0 – это значит найти все углы, синус которых равен нулю. Ординату, равную нулю, имеют две точки единичной окружности (1;**0**)и (- 1; **0**). Эти точки получаются из точки (1;0) поворотом на углы 0, π, 2π, 3π и т.д., а также на углы - π, - 2π, - 3π и т.д.. следовательно, sin x = 0 при x = πk.,где k – любое целое число т.е. решение можно оформить так:

$\sin x = 0$; $x = \pi k., k \in Z$. Ответ: $x = \pi k., k \in Z$

Рассуждая аналогично можно получить следующие решения тригонометрических уравнений:

	0	1	- 1
sin x	$x = \pi k., k \in Z$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k., k \in Z$
cos x	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k., k \in Z$	$x = 2\pi k., k \in Z$	$x = \pi + 2\pi k., k \in Z$

Приведем таблицу часто встречающихся значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

α	0 (0°)	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	π (180°)	$\frac{3}{2}\pi$ (270°)	2π (360°)
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\text{tg}\,\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Не существует	0	Не существует	0
$\text{ctg}\,\alpha$	Не существует	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	Не существует	0	Не существует

<u>**Задача №1**</u> Вычислить: $4\sin\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} - \text{tg}\frac{\pi}{4}$.

Решение: Используя таблицу, получаем

$$4\sin\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} - \text{tg}\frac{\pi}{4} = 4\cdot\frac{1}{2} + \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = 2 + 1{,}5 = 2{,}5.$$

<u>**Упражнения для самостоятельного решения**</u>:

1°. Вычислить:

а) $\sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{6}$; б) $\sin\pi - \cos\pi$; в) $\sin 0 - \cos 2\pi$; г) $\sin 3\pi - \cos\frac{3\pi}{2}$.

2°. Найти значение выражения:

а) $3\sin\frac{\pi}{6} + 2\cos\frac{\pi}{6} - \text{tg}\frac{\pi}{3}$; б) $\left(2\text{tg}\frac{\pi}{6} - \text{tg}\frac{\pi}{3}\right) : \cos\frac{\pi}{6}$;

в) $\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{6} - \text{tg}\frac{\pi}{4}$; г) $\cos 0 - \sin 3\pi$.

3°. Решить уравнение: а) $2 \sin x = 0$; б) $\frac{1}{2} \cos x = 0$; в) $\cos x - 1 = 0$; г) $1 - \sin x = 0$.

4*. Найти значение выражения:

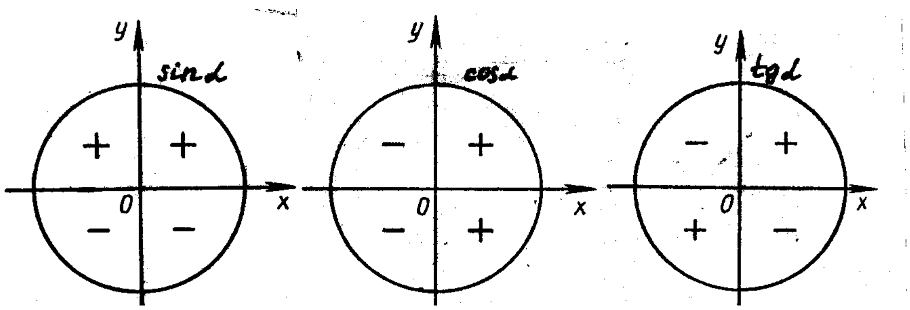
а) $2 \sin \alpha + \sqrt{2} \cos \alpha$ при $\alpha = \frac{\pi}{4}$; б) $0{,}5 \cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha$ при $\alpha = 60°$;

в) $\sin 3\alpha - \cos 2\alpha$ при $\alpha = \frac{\pi}{6}$; г) $\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{3}$ при $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

5*. Решить уравнение: а) $\sin x = -1$; б) $\cos \frac{1}{2} x = 0$; в) $\sin\left(\frac{x}{2} + 6\pi\right) = 1$; г) $\sin 3x = 0$.

Знаки синуса, косинуса и тангенса

Пусть точка движется по единичной окружности против часовой стрелки, тогда **синус** положителен в *первой и второй* координатных четвертях (рис.14); **косинус** положителен в *первой и четвертой* координатных четвертях (рис.15); **тангенс и котангенс** положителен в *первой и третьей* координатных четвертях (рис.16).



Задача №1 Выяснить знаки синуса, косинуса и тангенса угла:

1) $\frac{3\pi}{4}$; 2) 745°; 3) $-\frac{5\pi}{7}$.

Решение: 1) Углу $\frac{3\pi}{4}$ соответствует точка единичной окружности, расположенная во ***второй*** четверти. Поэтому $\sin \frac{3\pi}{4} > 0$, $\cos \frac{3\pi}{4} < 0$, $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} < 0$.

2) Так как $745° = 2 \cdot 360° + 25°$, то повороту точки (1;0) на угол 745° соответствует точка, расположенная в ***первой*** четверти. Поэтому $\sin 745° > 0$, $\cos 745° > 0$, $\operatorname{tg} 745° > 0$.

3) Точка движется по часовой стрелке, поэтому $-\pi < -\frac{5\pi}{7} < -\frac{\pi}{2}$, то при повороте точки (1;0) на угол $-\frac{5\pi}{7}$ получается точка **третьей** четверти. Поэтому $\sin\left(-\frac{5\pi}{7}\right) < 0$,

$$\cos\left(-\frac{5\pi}{7}\right)<0,\ \operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{7}\right)>0.$$

Упражнения для самостоятельного решения:

1°. В какой четверти находится точка, полученная поворотом точки P(1;0) на угол α, если:

а) $\alpha = \frac{\pi}{6}$; б) $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$; в) $\alpha = \frac{7\pi}{6}$;

г) $\alpha = 4{,}8$; д) $\alpha = -1{,}31$; е) $\alpha = -2{,}7$.

2°. Определить знак числа sin α, если:

а) $\alpha = \frac{5\pi}{4}$; б) $\alpha = -\frac{33\pi}{7}$; в) $\alpha = 5{,}1$; г) $\alpha = -470°$.

3°. Определить знак числа cos α, если:

1) $\alpha = \frac{7\pi}{6}$; 2) $\alpha = -\frac{2\pi}{5}$; 3) $\alpha = -5{,}3$; 4) $\alpha = -150°$.

4°. Определить знак числа tg α, если:

1) $\alpha = \frac{5\pi}{6}$; 2) $\alpha = -\frac{5\pi}{4}$; 3) $\alpha = 3{,}7$; 4) $\alpha = 283°$.

*5. Каковы знаки чисел sin α, cos α, tg α, если:

а) $3\pi < \alpha < \frac{10\pi}{3}$; б) $\frac{5\pi}{2} < \alpha < \frac{11\pi}{4}$.

6*. Определить знак числа:

а) $\sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{3\pi}{4}$; б) $\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}$; в) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}$.

ТЕМА: **Тригонометрические функции и их свойства.**

Цели и задачи:

Образовательные:
-построение тригонометрических функции,
-тригонометрические функции числового аргумента,
-построение функции графика вида, примеры.

- дать определения тригонометрическим функциям;
- рассмотреть основные свойства тригонометрических функций;
- показать графики тригонометрических функций.

Развивающие :
- способствовать развитию умений анализировать, устанавливать связи, причины и следствия;
- предвидеть возможные ошибки и способы их устранения;
- способствовать повышению концентрации внимания, развитию памяти и речи.

- способствовать развитию интереса к предмету «Математика»

Мы с вами уже многократно применяли термин «тригонометрическая функция». Еще на первом занятии этой темы мы определили их с помощью прямоугольного треугольника и единичной тригонометрической окружности. Используя такие способы задания тригонометрических функций, мы уже можем сделать вывод, что для них одному значению аргумента (или угла) соответствует строго одно значение функции, т.е. мы вправе называть синус, косинус, тангенс и котангенс именно функциями.

В школьной программе изучаются четыре тригонометрических функции — синус, косинус, тангенс и котангенс. В этой статье мы рассмотрим графики и основные свойства этих функций.

рассмотрим их свойства и изобразим графики.

Что касается свойств тригонометрических функций, то особое внимание следует обратить на:

- область определения и область значений, т.к. для синуса и косинуса есть ограничения по области значений, а для тангенса и котангенса ограничения по области определения;

- периодичность всех тригонометрических функций, т.к. мы уже отмечали наличие наименьшего ненулевого аргумента, добавление которого не меняет значение функции. Такой аргумент называют периодом функции и обозначают буквой T. Для синуса/косинуса и тангенса/котангенса эти периоды различны.

Функция синус и ее график

Рассмотрим функцию:

$y = sinx$

Основные свойства этой функции:

1) Область определения $D(x) = \mathbb{R}$;

2) Область значений $E(y) = [-1;1]$;

3) Функция нечетная $\sin(-x) = -sinx$;

4) Функция не является монотонной на всей своей области определения;

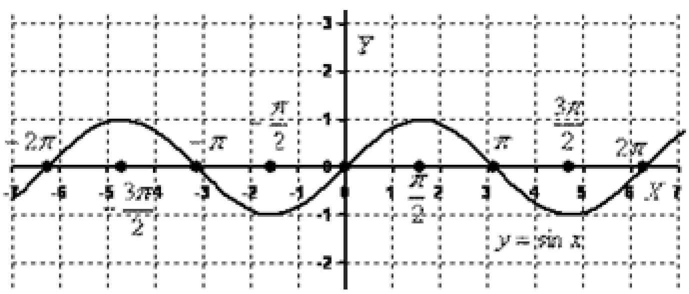
5) Функция периодична с периодом $T = 2\pi$.

Построим график функции $y = sinx$. При этом удобно начинать построение с изображения области, которая ограничивает график сверху числом 1

и снизу числом -1, что связано с областью значений функции.

Кроме того, для построения полезно помнить значения синусов нескольких основных табличных углов, например, что $sin0 = 0, sin\frac{\pi}{2}, \sin\pi = 0, \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1, \sin(-\pi) = 0$.

Это позволит построить первую полную «волну» графика и потом перерисовывать ее вправо и влево, пользуясь тем, что картинка будет повторяться со смещением на период, т.е. на 2π.



Функция косинус и ее график

Теперь рассмотрим функцию:

$y = cosx$

Основные свойства этой функции:

1) Область определения $D(x) = \mathbb{R}$;

2) Область значений $E(y) = [-1;1]$;

3) Функция четная $\cos(-x) = cosx.$ Из этого следует симметричность графика функции относительно оси ординат;

4) Функция не является монотонной на всей своей области определения;

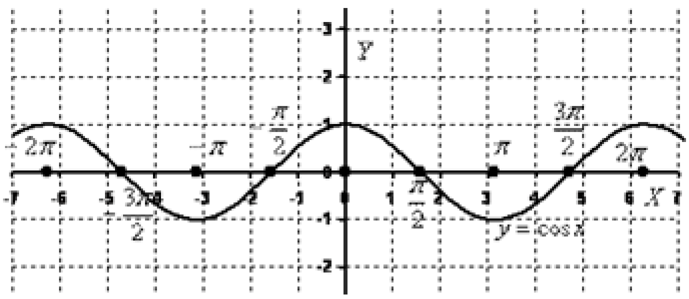
5) Функция периодична с периодом $T = 2\pi$.

Построим график функции $y = cosx$. Как и при построении синуса удобно начинать с изображения области, которая ограничивает график сверху числом 1

и снизу числом -1, что связано с областью значений функции.

Также нанесем на график координаты нескольких точек, для чего необходимо помнить значения косинусов нескольких основных табличных углов, например, что $cos0 = 1, cos\frac{\pi}{2} = 0, \cos\pi = -1, \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0, \cos(-\pi) = -1$.

С помощью этих точек мы можем построить первую полную «волну» графика и потом перерисовывать ее вправо и влево, пользуясь тем, что картинка будет повторяться со смещением на период, т.е. на 2π.



Функция тангенс и ее график

Перейдем к функции:

$y = tgx$

Основные свойства этой функции:

1) Область определения $D(x) = \mathbb{R}$ кроме $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Мы уже указывали в предыдущих уроках, что $tg\frac{\pi}{2}$ не существует. Это утверждение можно обобщить, учитывая период тангенса;

2) Область значений $E(y) = \mathbb{R}$, т.е. значения тангенса не ограничены;

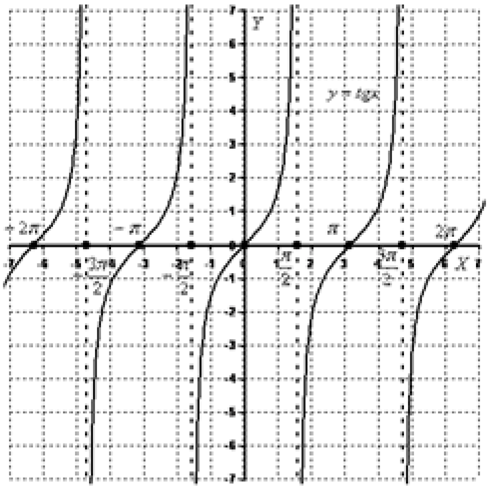
3) Функция нечетная $tg(-x) = -tgx$;

4) Функция монотонно возрастает в пределах своих так называемых веток тангенса, которые мы сейчас увидим на рисунке;

5) Функция периодична с периодом $T = \pi$.

Построим график функции $y = tgx$.

При этом удобно начинать построение с изображения вертикальных асимптот графика в точках, которые не входят в область определения, т.е. $x = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ и т.д. Далее изображаем ветки тангенса внутри каждой из образованных асимптотами полосок, прижимая их к левой асимптоте и к правой. При этом не забываем, что каждая ветка монотонно возрастает. Все ветки изображаем одинаково, т.к. функция имеет период, равный π. Это видно по тому, что каждая ветка получается смещением соседней на π вдоль оси абсцисс.



Функция котангенс и ее график

И завершаем рассмотрением функции:

$y = ctgx$

Основные свойства этой функции:

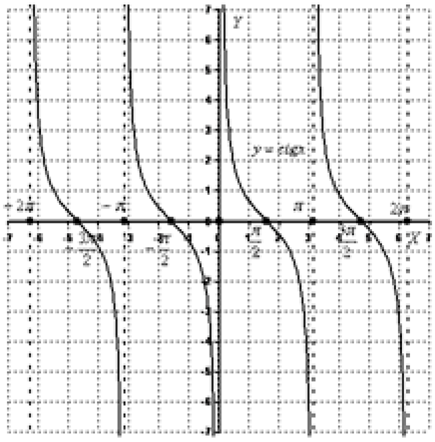
1) Область определения $D(x) = \mathbb{R}$ кроме $x = \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. По таблице значений тригонометрических функций мы уже знаем, что $ctg0$ не существует. Это утверждение можно обобщить, учитывая период котангенса;

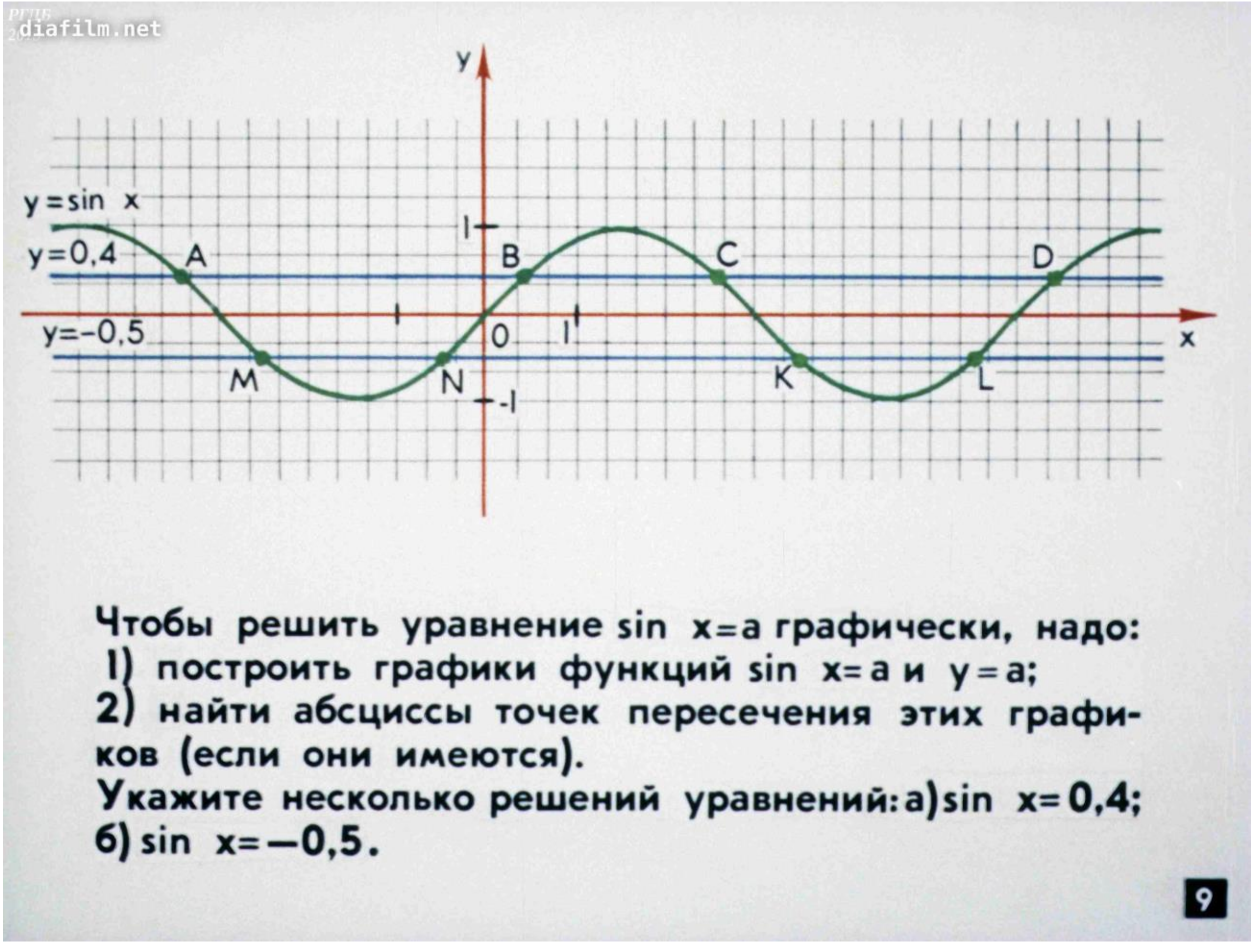
2) Область значений $E(y) = \mathbb{R}$, т.е. значения котангенса не ограничены;

3) Функция нечетная $ctg(-x) = -ctgx$;

4) Функция монотонно убывает в пределах своих веток, которые похожи на ветки тангенса;5) Функция периодична с периодом $T = \pi$.

Построим график функции $y = ctgx$. При этом, как и для тангенса, удобно начинать построение с изображения вертикальных асимптот графика в точках, которые не входят в область определения, т.е. $x = -\pi, 0, \pi$ и т.д. Далее изображаем ветки котангенса внутри каждой из образованных асимптотами полосок, прижимая их к левой асимптоте и к правой. В этом случае учитываем, что каждая ветка монотонно убывает. Все ветки аналогично тангенсу изображаем одинаково, т.к. функция имеет период, равный π.





Тема: Простейшие тригонометрические уравнения.

Задачи: Образовательный: Ввести понятие простейшего тригонометрического уравнения и научить решать их.

Развивающий: развивать логическое мышление, познавательный интерес.

Воспитательный: воспитывать трудолюбие.

Простейшими называются тригонометрические уравнения следующих четырёх видов:

$$\sin x = a$$
$$\cos x = a$$
$$tg\, x = a$$
$$ctg\, x = a$$

Любое тригонометрическое уравнение в конечном счёте сводится к решению одного или нескольких простейших

Тригонометрические уравнения. Уравнение, содержащее неизвестное под знаком тригонометрической функции, называется *тригонометрическим*.

Необходимый минимум для того, чтобы решать тригонометрические уравнения

- что такое синус, косинус, тангенс, котангенс.

- какие знаки принимает та или иная тригонометрическая функция в разных четвертях тригонометрической окружности,

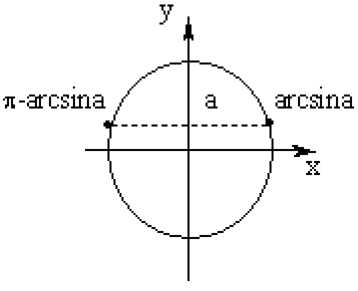
- какие из этих функций нечётные, а какая – чётная,

- также совершенно необходимо знание значений тригонометрических функций в основных углах 1 четверти.

Простейшие тригонометрические уравнения.

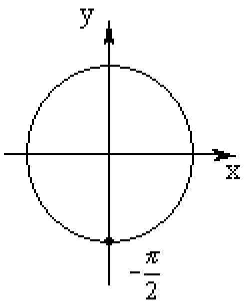
1. $\sin x = a$, $|a| \le 1$

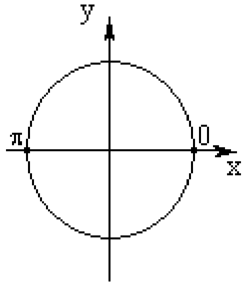
$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k$, $k \in Z$

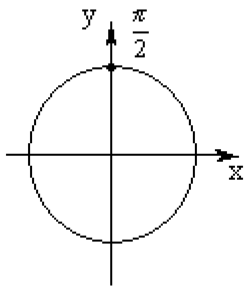


Частные случаи:

$a = -1$	$a = 0$	$a = 1$
$\sin x = -1$	$\sin x = 0$	$\sin x = 1$
$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$	$x = \pi k$, $k \in Z$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$



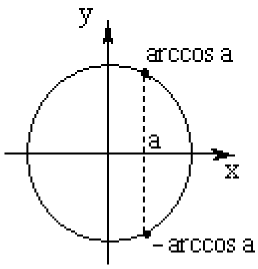




| a| >1 корней нет

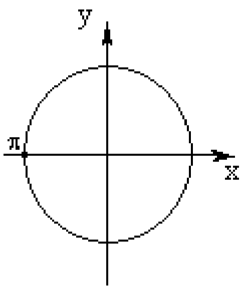
2. cos x = *a* , |a|≤ 1

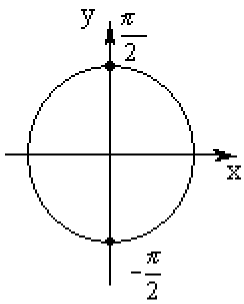
x = ± arccos *a* + 2π *k* , *k* ∈ *Z*

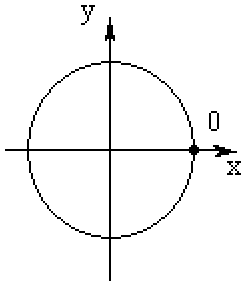


Частные случаи:

a = –1	*a* = 0	a = 1
cos x = –1	cos x = 0	cos x = 1
x = π + 2π *k* , *k* ∈ *Z*	x = $\frac{\pi}{2}$ + π *k* , *k* ∈ *Z*	x = 2π *k* , *k* ∈ *Z*







|a| >1 корней нет

3. tg x = *a* , *a* ∈ *R*
x = ± arctg *a* + π *k* , *k* ∈ *Z*

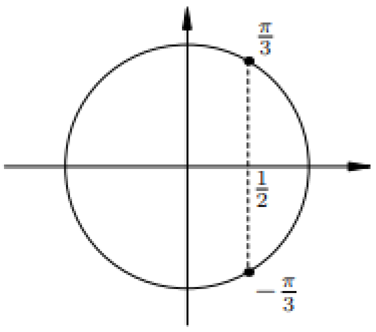
Арккосинус a есть число, заключенное в интервале от 0 до π, косинус которого равен a.

Арксинус a есть число, заключенное в интервале от $-\pi$ до π, косинус которого равен a.

Решение простейших тригонометрических уравнений

1. Решить уравнение: $\cos x = \dfrac{1}{2}$

Имеем вертикальную пару точек с абсциссой $\dfrac{1}{2}$:



Все углы, соответствующие верхней точке, описываются формулой (вспомните первое полезное наблюдение!):

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$$

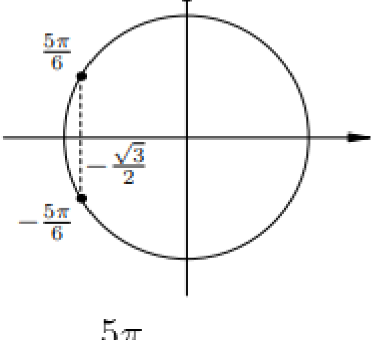
Аналогично, все углы, соответствующие нижней точке, описываются формулой:

$$x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$$

Обе серии решений можно описать одной формулой:

$$x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$$

2. Решить уравнение: $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

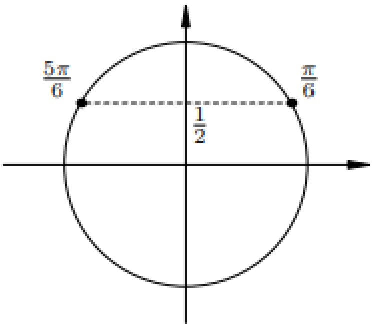


3.

$$x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$$

3.Решиить уравнение:

$sin\,x = \frac{1}{2}$, Имеем горизонтальную пару точек с ординатой $\frac{1}{2}$:



Углы, отвечающие правой точке:
$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$
Углы, отвечающие левой точке:
$x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$

. Можно записать ответ в таком виде:

(объединяющая формула). Выглядит она так: Ответ: $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$

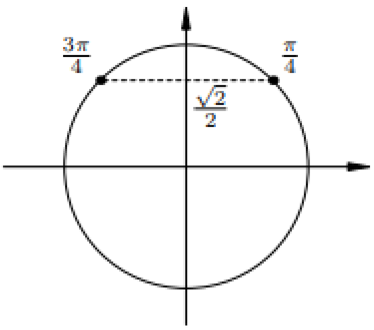
На первый взгляд совершенно не ясно, каким образом она дает обе серии решений. Но давайте посмотрим, что получается при чётных k. Если $k = 2n$, то

Мы получили первую серию решений x_1. А если k — нечетно, $k = 2n + 1$, тоЭто вторая серия x_2.

Обратим внимание, что в качестве множителя при $(-1)^k$ обычно ставится правая точка, в данном случае $\frac{\pi}{6}$.

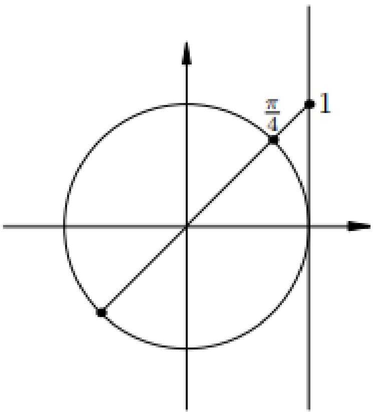
Остальные уравнения с синусом решаются точно так же. Мы приводим рисунок, запись ответа в виде совокупности двух серий и объединяющую формулу.

4. Решить уравнение: $sin\,x = \frac{\sqrt{2}}{2}$



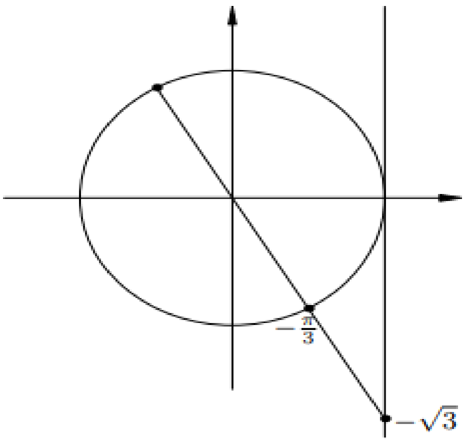
Ответ: $x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$

Решить уравнение: . $tg x = 1$



ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$

Решить уравнение: $tg x = -\sqrt{3}$



ответ: $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$

Пример 4. Найдите корни уравнения

$$\cos\left(4x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

принадлежащие промежутку $[-\pi;\pi)$.

Решение. Используем вторую формулу на рисунке. Здесь и далее полагаем $k,\ n\in Z$ (на всякий случай, эта запись означает, что числа n и k принадлежат множеству целых чисел):

$$4x+\frac{\pi}{4}=\pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2\pi k.$$

Другими словами, нам нужно подобрать такое число из промежутка $[0;2\pi]$, косинус которого был бы равен $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Это число $\frac{3\pi}{4}$. Используя это, получаем:

$$4x+\frac{\pi}{4}=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2},\\ x=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}.\end{array}\right.$$

Самостоятельная работа.

1. Решите уравнения:

а) $\sin(2x-\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{2}$

б) $\cos(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{2}}{2}$

в) $tg\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$

г) $\sin 6x=\frac{9}{8}$

д) $\cos(4x+\frac{\pi}{3})=-1$

е) $tg(3x+\frac{\pi}{6})=1$

2. Решите неравенства

а) $\sin x\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$ б) $\cos\left(\frac{x}{3}\right)\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$ **(используйте графики тригонометрических фун.)**

Тема: Типы тригонометрических уравнении и методы их решения.
Цель:

Образовательная:
Ознакомить с основными видами тригонометрических уравнений и методами их решения.
Развивающая: развивать внимательность и логическое решение, интерес к предмету.
Воспитательное: прививать трудолюбие.
Основные типы тригонометрических уравнений.

1. Уравнения, сводящиеся к простейшим.
2. Уравнения, сводящиеся к квадратным.
3. Однородные уравнения: asinx + bcosx = 0, $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$.
4. Уравнения вида $a\sin x + b\cos x = c$, $c \neq 0$.

$$a\sin x + b\cos x = c \;\Big|:\; \sqrt{a^2+b^2},$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Поскольку

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1,$$

можно ввести вспомогательный угол φ такой, что

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Уравнение примет вид:

$$\sin(x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

5. Уравнения, решаемые разложением на множители.
6. Нестандартные уравнения.

Чтобы решить тригонометрическое уравнение, надо попытаться:

1. привести все функции входящие в уравнение к «одинаковым углам»;
2.привести уравнение к «одинаковым функциям»;
3. разложить левую часть уравнения на множители и т.п.

Рассмотрим **основные методы решения тригонометрических уравнений.**

I. Приведение к простейшим тригонометрическим уравнениям

Арккосинус a есть число, заключенное в интервале от 0 до π, косинус которого равен a.

Арксинус a есть число, заключенное в интервале от $-\pi$ до π, косинус которого равен a.

Схема решения

Выразить тригонометрическую функцию через известные компоненты. Найти аргумент функции по формулам:

cos x = a; x = ±arccos a + 2πn, n ЄZ.

sin x = a; x = $(-1)^n$ arcsin a + πn, n Є Z.

tg x = a; x = arctg a + πn, n Є Z.

ctg x = a; x = arcctg a + πn, n Є Z.

Найти неизвестную переменную.

Пример. **2 cos(3x – π/4) = -√2.**

Решение.

cos(3x – π/4) = -√2/2.

3x – π/4 = ±(π – π/4) + 2πn, n Є Z;

3x – π/4 = ±3π/4 + 2πn, n Є Z.

3x = ±3π/4 + π/4 + 2πn, n Є Z;

x = ±3π/12 + π/12 + 2πn/3, n Є Z;

x = ±π/4 + π/12 + 2πn/3, n Є Z.

Ответ: ±π/4 + π/12 + 2πn/3, n Є Z.

II. Замена переменной

Схема решения

Шаг 1. Привести уравнение к алгебраическому виду относительно одной из тригонометрических функций.

Шаг 2. Обозначить полученную функцию переменной t (если необходимо, ввести ограничения на t).

Шаг 3. Записать и решить полученное алгебраическое уравнение.

Шаг 4. Сделать обратную замену.

Шаг 5. Решить простейшее тригонометрическое уравнение.

Решение уравнений, сводящихся к квадратным уравнениям

3 sin x – 2 $\cos^2$x = 0,
3 sin x – 2 (1 – $\sin^2$x) = 0,
2 $\sin^2$x + 3 sin x – 2 = 0,

Пусть sin x = t, где | t |≤ 1.

Получим квадратное уравнение $2t^2$ + 3t – 2 = 0,

D = 9 + 16 = 25.

$t_{1,2} = \dfrac{-3 \pm 5}{4}$. Таким образом $\begin{array}{l} t_1 = -2; \\ t_2 = \dfrac{1}{2} \end{array}$. $t_1 = -2$ не удовлетворяет условию | t |≤ 1.

Значит $\sin x = \frac{1}{2}$. Поэтому $x = (-1)^{k}\frac{\pi}{6} + \pi k, \pi \in Z$.

Ответ: $(-1)^{k}\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$

Пример. **$2\cos^2 (x/2) – 5\sin (x/2) – 5 = 0$.**

Решение.

1) $2(1 – \sin^2 (x/2)) – 5\sin (x/2) – 5 = 0$;

$2\sin^2 (x/2) + 5\sin (x/2) + 3 = 0$.

2) Пусть $\sin (x/2) = t$, где $|t| \le 1$.

3) $2t^2 + 5t + 3 = 0$;

t = 1 или е = -3/2, не удовлетворяет условию |t| ≤ 1.

4) $\sin (x/2) = 1$.

5) $x/2 = \pi/2 + 2\pi n$, n Є Z;

$x = \pi + 4\pi n$, n Є Z.

Ответ: x = π + 4πn, n Є Z.

<u>III. Метод понижения порядка уравнения</u>

<u>Схема решения</u>

Шаг 1. Заменить данное уравнение линейным, используя для этого формулы понижения степени:

$\sin^2 x = 1/2 \cdot (1 – \cos 2x)$;

$\cos^2 x = 1/2 \cdot (1 + \cos 2x)$;

$tg^2 x = (1 – \cos 2x) / (1 + \cos 2x)$.

Шаг 2. Решить полученное уравнение с помощью методов I и II.

Пример.

$\cos 2x + \cos^2 x = 5/4$.

Решение.

1) $\cos 2x + 1/2 \cdot (1 + \cos 2x) = 5/4$.

2) $\cos 2x + 1/2 + 1/2 \cdot \cos 2x = 5/4$;

$3/2 \cdot \cos 2x = 3/4$;

$\cos 2x = 1/2$;

$2x = \pm\pi/3 + 2\pi n$, n Є Z;

$x = \pm\pi/6 + \pi n$, n Є Z.

Ответ: x = ±π/6 + πn, n Є Z.

<u>IV. Однородные уравнения</u>

<u>Схема решения</u>

Шаг 1. Привести данное уравнение к виду

а) $a \sin x + b \cos x = 0$ (однородное уравнение первой степени)

или к виду

б) $a \sin^2 x + b \sin x \cdot \cos x + c \cos^2 x = 0$ (однородное уравнение второй степени).
Шаг 2. Разделить обе части уравнения на

а) $\cos x \neq 0$;

б) $\cos^2 x \neq 0$;

и получить уравнение относительно tg x:

а) $a\,\mathrm{tg}\, x + b = 0$;

б) $a\,\mathrm{tg}^2 x + b\,\mathrm{arctg}\, x + c = 0$.
Шаг 3. Решить уравнение известными способами.

Пример. $\mathbf{5\sin^2 x + 3\sin x \cdot \cos x - 4 = 0.}$

Решение.
1) $5\sin^2 x + 3\sin x \cdot \cos x - 4(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0$;
$5\sin^2 x + 3\sin x \cdot \cos x - 4\sin^2 x - 4\cos^2 x = 0$;
$\sin^2 x + 3\sin x \cdot \cos x - 4\cos^2 x = 0/\cos^2 x \neq 0$.
2) $\mathrm{tg}^2 x + 3\mathrm{tg}\, x - 4 = 0$.
3) Пусть tg x = t, тогда
$t^2 + 3t - 4 = 0$;

t = 1 или t = -4, значит

tg x = 1 или tg x = -4.

Из первого уравнения $x = \pi/4 + \pi n$, $n \in Z$; из второго уравнения $x = -\mathrm{arctg}\, 4 + \pi k$, $k \in Z$.
Ответ: $x = \pi/4 + \pi n$, $n \in Z$; $x = -\mathrm{arctg}\, 4 + \pi k$, $k \in Z$.

V. Метод преобразования уравнения с помощью тригонометрических формул

Схема решения

Шаг 1. Используя всевозможные тригонометрические формулы, привести данное уравнение к уравнению, решаемому методами I, II, III, IV.
Шаг 2. Решить полученное уравнение известными методами.
Решите уравнение

$\sin 4x = 3 \cos 2x$

Для решения уравнения воспользуемся формулой синуса двойного угла $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$
$2 \sin 2x \cos 2x - 3 \cos 2x = 0$,
$\cos 2x\,(2 \sin 2x - 3) = 0$. Произведение этих множителей равно нулю, если хотя бы один из множителей будет равен нулю.

$2x = \frac{\pi}{2} + \pi к$, $к \in Z$ или $\sin 2x = 1{,}5$ – нет решений, т.к $|\sin\alpha| \leq 1$

$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k; \quad k \in Z.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, \quad k \in Z.$

Пример. sin x + sin 2x + sin 3x = 0.

Решение.

1) (sin x + sin 3x) + sin 2x = 0;

2sin 2x · cos x + sin 2x = 0.

2) sin 2x · (2cos x + 1) = 0;

sin 2x = 0 или 2cos x + 1 = 0;

1.Из первого уравнения 2x = π/2 + πn, n Є Z; 2.из второго уравнения cos x = -1/2.

Имеем x = π/4 + πn/2, n Є Z; из второго уравнения x = ±(π – π/3) + 2πk, k Є Z.

В итоге x = π/4 + πn/2, n Є Z; x = ±2π/3 + 2πk, k Є Z.

Ответ: x = π/4 + πn/2, n Є Z; x = ±2π/3 + 2πk, k Є Z.

Самостоятельная работа.

Решите уравнения:

1. $2\sin x + \sqrt{2} = 0.$ 2. $2\cos x + \sqrt{3} = 0.$

3. $\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0.$ 4. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0.$

6. $\sin x\cos x + 2\sin^2 x = \cos^2 x.$ 5. $\sin^2 x - 2\cos x + 2 = 0.$

7. $3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 2.$ 8. $5\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 4.$

9. $\cos^2 x + 3\sin x - 3 = 0.$

6. Найдите корни уравнения $\sin 3x = \cos 3x,$ 2. $\sin 2x = \sqrt{3}\cos 2x,$

Тема: Фигуры вращения: цилиндр, конус, шар.

Цели и задачи занятия:

научить применять эти формулы при решении задач. Организовать деятельность учащихся,

направляя её на получение знаний, практических навыков,
Развивающая:

развивать логическое мышление, интерес к предмету, расширить представления об окружающем нас мире. Воспитание внимания, взаимопомощи.

Великий греческий ученый Архимед был очень взволнован, когда он обнаружил, что отношение площади поверхности шара и описанного около него цилиндра и отношение их объемов равно 2:3. Великий математик, физик, инженер, Архимед, среди всех своих работ самой значимой считал именно эту. Он завещал на своей могильной плите выгравировать доказательство данной теоремы. Из истории известно, что долгое время его родной город Сиракузы, располагающийся на Сицилии, противостоял римлянам именно благодаря оружию, которое изобрел Архимед. Поэтому при взятии города римский военачальники приказал сохранить ученому жизнь. Но римский воин, который не знал Архимеда в лицо, убил его. Великий философ и писатель Цицерон потратил много времени, чтобы отыскать могилу Архимеда (по историческим сведениям он нашел ее через 137 лет). Это дело Цицерона стало идеей для работ многих художников.

Определение фигур вращения

Гончарное ремесло позволяет создавать керамическую посуду из глины. Форму глиняной лепешке придают вращением вокруг оси. Затем полученную форму обжигают. Это ремесло живо и по сей день. В различных районах Азербайджана есть ремесленники, которые изготавливают керамическую посуду. Исследуйте принцип работы по которому кусок глины приобретает какую-либо форму.

Плоские фигуры (плоская часть ограниченная кривой), совершая один полный оборот вокруг определенной оси, образуют пространственные фигуры. Эта ось называется **осью вращении.**

Цилиндр, конус и сфера являются простыми пространственными фигурами, полученными при вращении.

Например, при вращении прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов получается конус, при вращении прямоугольника вокруг стороны образуется цилиндр, а при вращении полукруга вокруг диаметра - шар.

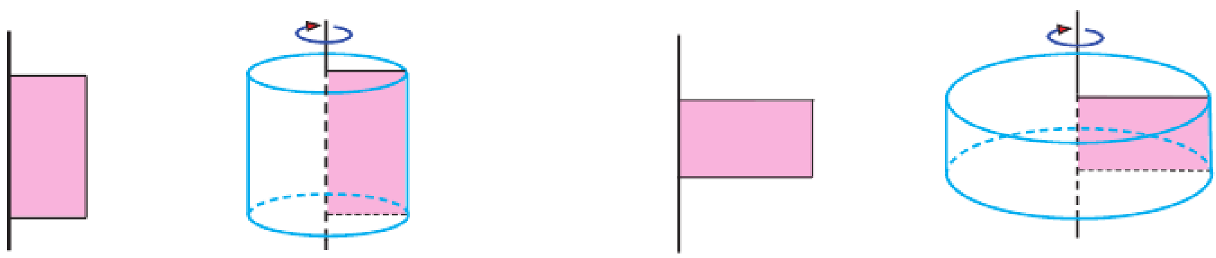
Цилиндром называется пространственная фигура, образованная двумя параллельными и конгруэнтными плоскими фигурами, которые совпадают при параллельном переносе, и отрезками, соединяющими соответствующие точки данных фигур. Плоские фигуры называются **основаниями** цилиндра, отрезки, соединяющие соответствующие точки основания называются **образующими** цилиндра. Если образующая перпендикулярна основанию, то цилиндр называется прямым, иначе - наклонным. Расстояние между основаниями называется высотой цилиндра.

Прямой цилиндр, в основании которого лежит круг, называют **прямым круговым цилиндром.**

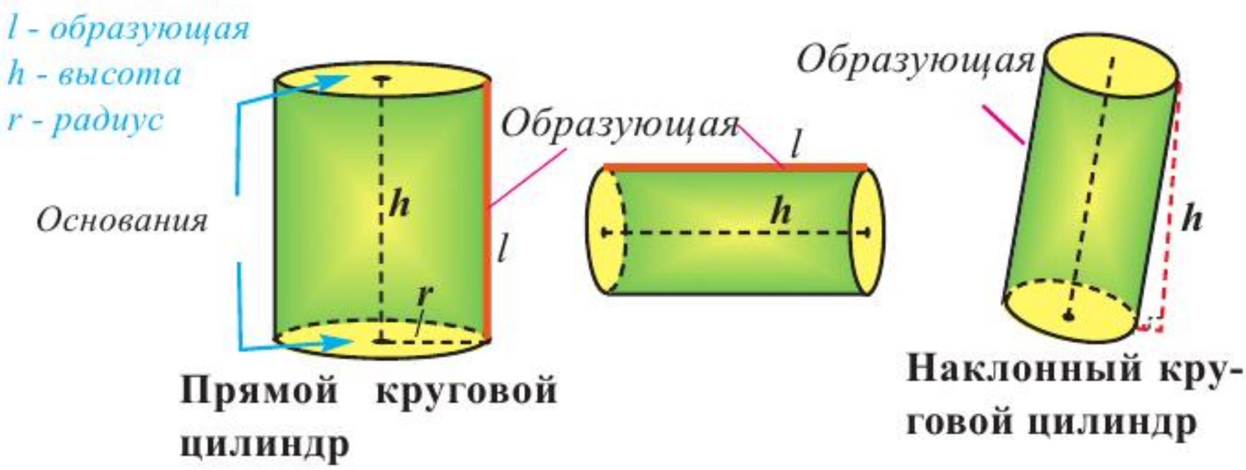
Далее, говоря о цилиндре, мы будем иметь в виду прямой круговой цилиндр. В любом другом случае будут отмечены его особенности.

Прямой круговой цилиндр также можно рассматривать как фигуру, полученную вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон. Высота прямого кругового цилиндра равна его образующей. **Радиусом цилиндра** называется радиус круга в основании.

Вращая прямоугольник вокруг любой стороны, можно получить цилиндр, высота которого равна стороне прямоугольника.

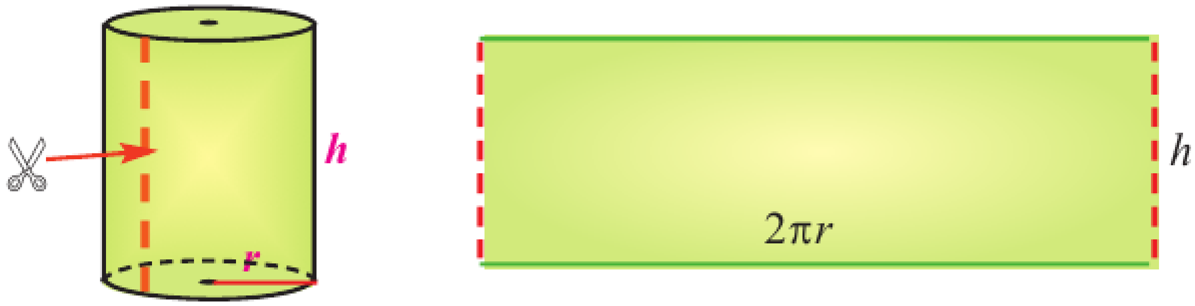


Прямая, проходящая через центры оснований прямого кругового цилиндра называется **осью цилиндра.**



Полная поверхность цилиндра находится но формуле схожей с формулой полной поверхности призмы. Полная поверхность цилиндра состоит из боковой поверхности и двух конгруэнтных кругов.

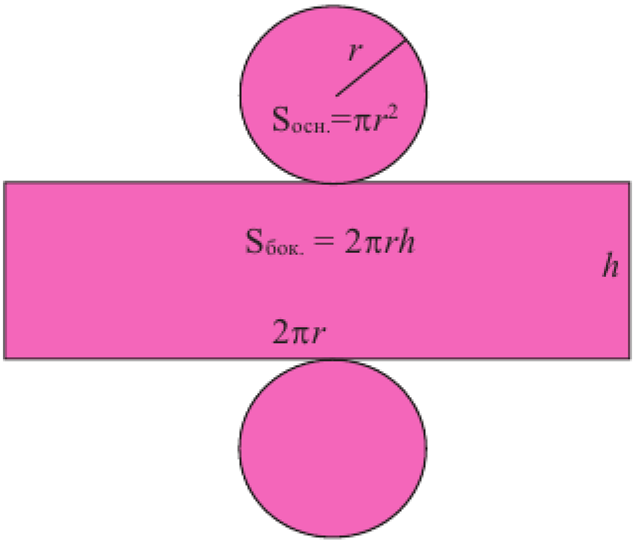
Боковую поверхность цилиндра с высотой h и радиусом r, можно рассматривать как свернутый вокруг окружности прямоугольник со сторонами $2\pi r$ и h.



Боковая поверхность цилиндра равна произведению длины окружности основания и высоты.

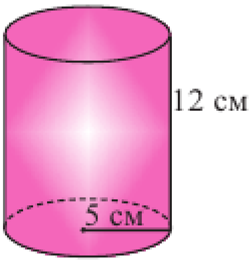
$$S_{бок.} = 2\pi rh$$

Площадь **полной поверхности** цилиндра равна сумме площади боковой поверхности и площадей оснований



Пример №1

Найдите площадь полной поверхности цилиндра выстой 12 см и радиусом 5 см.



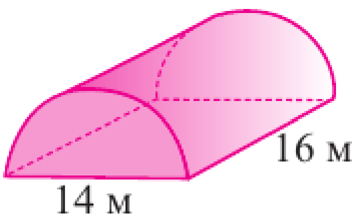
Решение: $S_{бок.} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 5 \cdot 12 = 120\,\pi \approx 376{,}8$ (см^2)

$S_{осн.} = \pi r^2 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi \approx 78{,}5$ (см^2)

$S_{п.п.} = S_{бок.} + 2S_{осн.} = 120\pi + 2\cdot 25\pi = 170\,\pi \approx 533{,}8$ (см^2)

Пример №2

По данным рисунка, найдите площадь боковой поверхности прямого цилиндра, основанием которой являются полукруг.

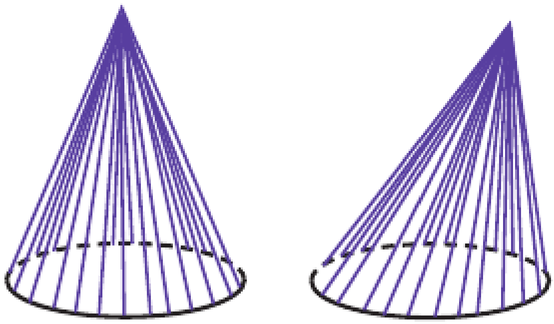


Решение: $S_{бок.\ сеч.} = \pi rh + 2rh = \pi\cdot 7\cdot 16 + 14\cdot 16 =$

$= 112\pi + 224 \approx 575{,}68$ (м^2)

Конус

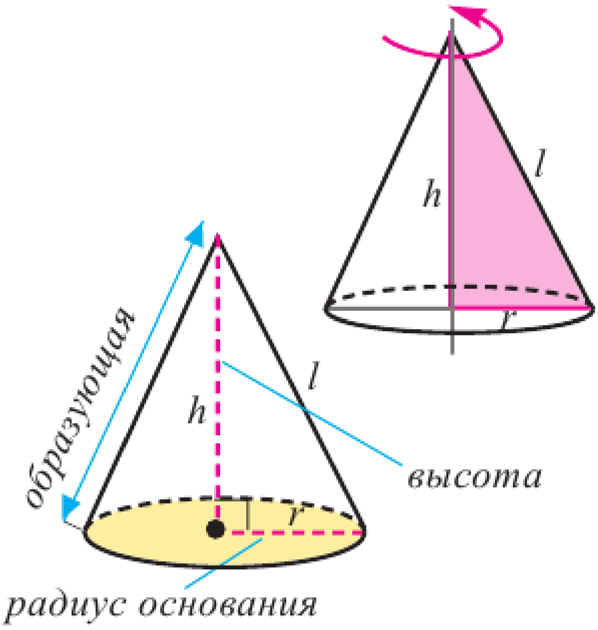
Конусом называется пространственная фигура, образованная всеми отрезками, соединяющими какую-либо плоскую фигуру с точкой, не принадлежащей данной плоскости. Плоскую фигуру называют **основанием** конуса, а точку **-вершиной** конуса.



Перпендикуляр, проведенный из вершины конуса на плоскость его основания, называется **высотой** конуса. Конус, в основании которого лежит круг, называется **круговым** конусом. Если ортогональная проекция вершины конуса лежит в центре основания, то конус называется **прямым круговым конусом.** Отрезок, соединяющий вершину конуса с любой точкой окружности основания кругового конуса, называется **образующей** конуса. В дальнейшем, говоря о конусе, будем иметь ввиду прямой круговой конус.

Конус можно рассматривать как фигуру, образованную вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов.

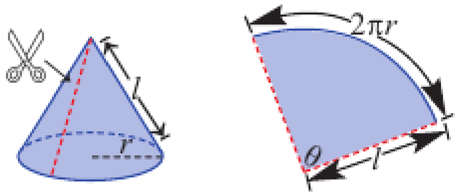
Прямая, выходящая из вершины конуса и проходящая через центр основания, называется **осью конуса,** радиус основания называется **радиусом конуса.** Для образующей, высоты и радиуса конуса справедливо отношение $l^2 = h^2 + r^2$ (по теореме Пифагора)



Радиус сектора равен образующей конуса, а длина дуги сектора равна длине окружности основания.

Боковая поверхность конуса, полная поверхность конуса

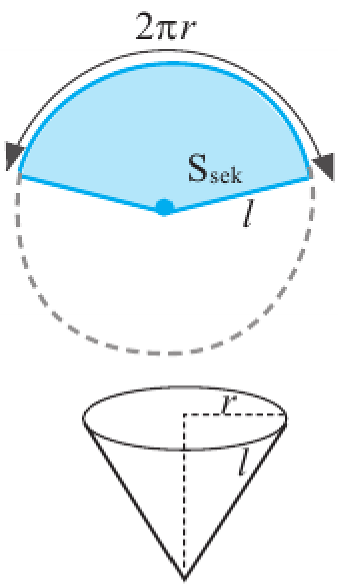
Поверхность конуса состоит из боковой поверхности и круга в основании. На рисунке показаны радиус основания r и образующая l.



Боковая поверхность конуса - круговой сектор с радиусом l и соответствующим центральным углом θ.

Значит, площадь сектора и есть площадь боковой поверхности.

- Сектор радиуса l является частью круга окружности с длиной $2\pi l$.
- Длина дуги сектора равна длине окружности основания конуса, т. е. $2\pi r$.
- Записав отношение длины дуги сектора к длине всей окружности, можно найти какую часть от всего круга составляет сектор.



$$\frac{\text{длина дуги сектора}}{\text{длина всей окружности}} = \frac{2\pi r}{2\pi l} = \frac{r}{l}$$

Значит, сектор составляет $\frac{r}{l}$ часть окружности.

* Знаная, что площадь круга πl^2, тогда $\frac{r}{l}$ часть площади круга будет $\pi l^2 \cdot \frac{r}{l}$.

Значит,

$S_{\text{бок.}} = \pi l^2 \cdot \frac{r}{l} = \pi lr,$ $\quad \boldsymbol{S_{\text{бок.}} = \pi lr}$

Боковая поверхность конуса равна произведению половины длины окружности основания и образующей.

* Площадь полной поверхности конуса

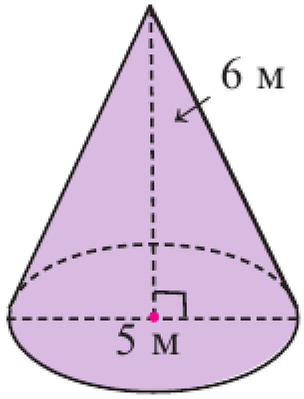
$$S_{\text{п.п.}} = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}} = \pi lr + \pi r^2 = \pi r(l + r)$$

$\boldsymbol{S_{\text{п.п.}} = \pi lr + \pi r^2}$ **или** $\boldsymbol{S_{\text{п.п.}} = \pi r(l + r)}$

Пример №4

По рисунку найдите площадь боковой и полной поверхностей конуса.

Решение: Дано: $d = 5$ м, $h = 6$ м



Найти: $S_{\text{бок.}}$ и $S_{\text{п.п.}}$

$S_{\text{бок.}} = \pi l r$ и $S_{\text{п.п.}} = \pi r(l + r)$

Чтобы найти образующую $l,$ применим теорему Пифагора

$$l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{2{,}5^2 + 6^2} = 6{,}5 \text{ (м)}$$

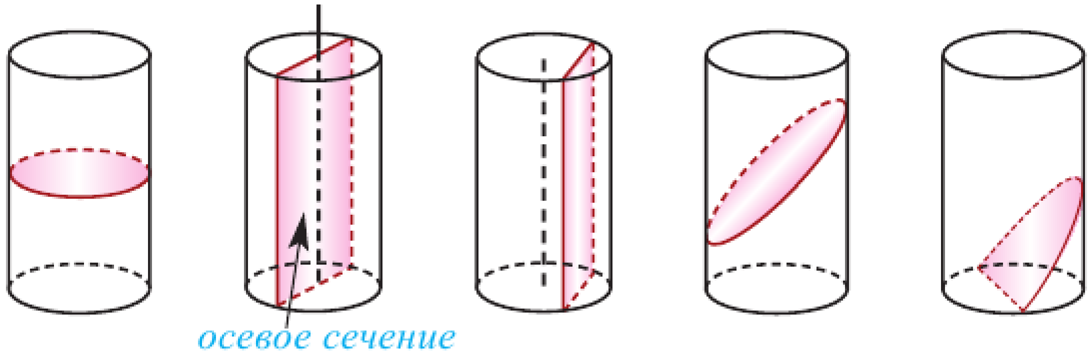
$$S_{\text{бок.}} = \pi \cdot 6{,}5 \cdot 2{,}5 = 16{,}25\pi \text{ (м}^2\text{)}; \quad S_{\text{п.п.}} = 22{,}75\pi \text{ (м}^2\text{)}$$

Сечения цилиндра и конуса плоскостью

Сечения поверхности конуса плоскостью (теория конических сечений) считались одной из вершин античной геометрии. Исследования Аполлония (3-й в.до н.э.) показали, что сечением плоскостью конуса, с бесконечной образующей (лучом) является: эллине (плоскость пересекает все образующие), парабола (плоскость сечения параллельна одной из образующих) или ветвь гиперболы (плоскость сечения параллельна двум образующим).

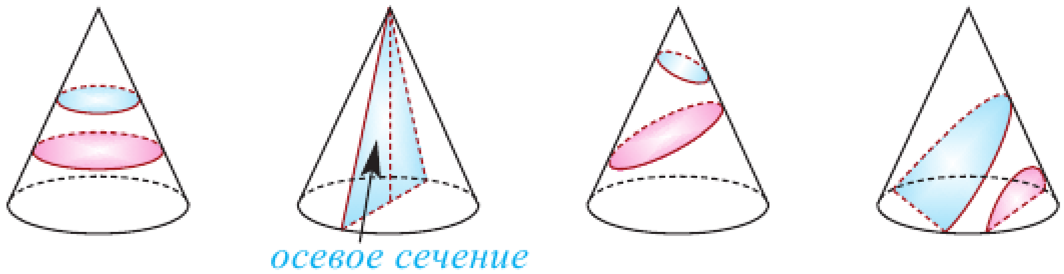
Сечения цилиндра плоскостью

Сечением цилиндра плоскостью, параллельной основанию, является круг. Сечение цилиндра плоскостью, проходящей через ось симметрии, называется **осевым сечением.** Осевое сечение цилиндра является прямоугольником со сторонами h и $2r.$ Значит, $S_{\text{ос.сеч.}} = 2\,rh.$ Цилиндр, осевое сечение которого является квадратом $(h = 2r),$ называется **равносторонним цилиндром.**



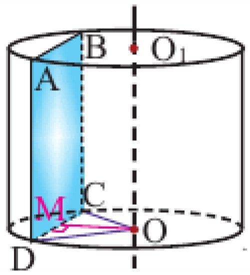
Сечения конуса плоскостью

Сечением конуса плоскостью, параллельной основанию, является круг. Сечение конуса, проходящее через ось конуса называется **осевым сечением** конуса. Это сечение является равнобедренным треугольником, боковые стороны которого являются образующими, а основание равно диаметру конуса: $S_{ос.сеч.}=rh.$ Если осевое сечение конуса является правильным треугольником $(l = 2r),$ то конус называется **равносторонним конусом.**



Пример №5

Сечением цилиндра плоскостью, проведенного параллельно оси цилиндра на расстоянии 3 см от оси, является квадрат, площадь которого равна 64 $см^2$. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

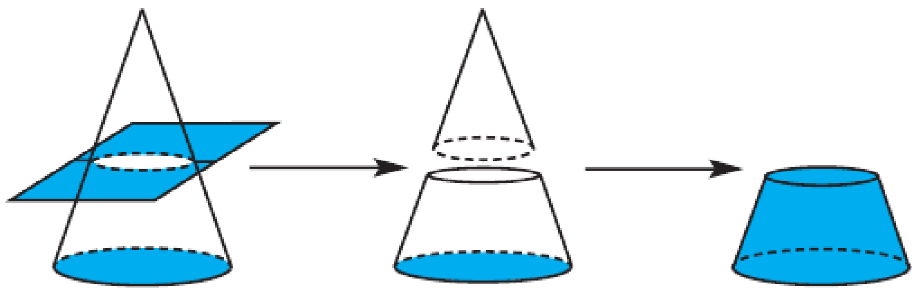


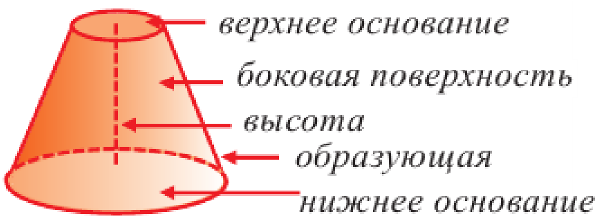
Решение: сначала найдем радиус и высоту цилиндра. По условию $CD = AD$ и $S_{сеч.} = CD \cdot AD = 64.$ Отсюда $CD=AD=8,$ значит $h = 8$ (см). Из ΔOMD: $r^2 = OD^2 = OM^2 + MD^2 = 3^2 + 4^2 = 25,$ отсюда $r = 5$ (см). Таким образом, $S_{п.п.} = 2\pi r(h + r) = 2\pi \cdot 5 \cdot (8+5) = 130\pi$ (см^2).

Усеченный конус и площадь поверхности

Усеченный конус

Если параллельно основанию прямого кругового конуса провести плоскость, то получим маленький конус и **усеченный конус.**

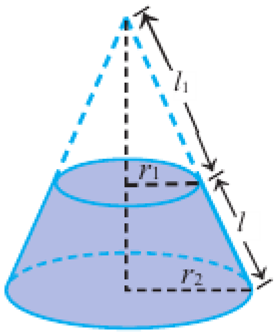




Усеченным конусом называется часть конуса, заключенная между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию.

Боковая поверхность усеченного конуса равна разности боковых поверхностей большого конуса и маленького конуса, отсеченного плоскостью, параллельной основанию, от большого конуса. Используя обозначения на рисунке, можно записать:

$$S_{бок} = \pi r_2(l + l_1) - \pi r_1 l_1 = \pi \left[(r_2 - r_1)l_1 + r_2 l\right]$$



Из подобия треугольников запишем следующее отношение $\frac{l_1}{r_1} = \frac{l + l_1}{r_2}$

Тогда, подставив $l_1 r_2 = r_1(l + l_1)$ или $(r_2 - r_1)l_1 = r_1 l$ в формулу для нахождения боковой поверхности, получим:

$$\mathbf{S_{бок.} = \pi\,(r_1 l + r_2 l) = \pi\, l(r_1 + r_2)\ .}$$

В данной формуле введем обозначение $r = \frac{r_1 + r_2}{2}$ среднего радиуса усеченного конуса. Тогда

$$\mathbf{S_{бок} = 2\pi\, r l}$$

Полная поверхность усеченного конуса равна сумме боковой поверхности и площадей нижнего и верхнего оснований.

$$\mathbf{S_{п.п.} = \pi\, l(r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2 = \pi(r_1 + r_2)l + \pi(r_1^2 + r_2^2)}$$

Пример №6

Конус высотой 8 см и радиусом 6 см рассечен плоскостью, параллельной основанию. Высота полученного усеченного конуса равна 4 см. Найдите площади боковой и полной поверхностей усеченного конуса

Решение: дано: $r_2 = 6,\ h = 8$ см, $h_{ус.кон} = 4$ см

Найти:

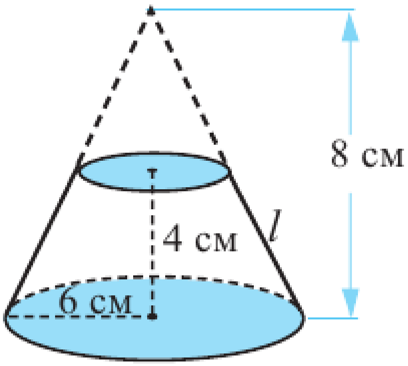
$S_{бок.} = ?$
$S_{п.п.} = ?$

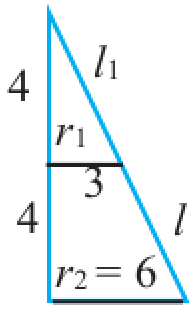
$$S_{бок} = \pi\, l(r_1 + r_2),\ \ r_1 = \frac{r_2}{2} = 3,$$

$$l_1 = l = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$S_{бок} = 5(3 + 6)\,\pi = 45\pi\ (см^2).$$

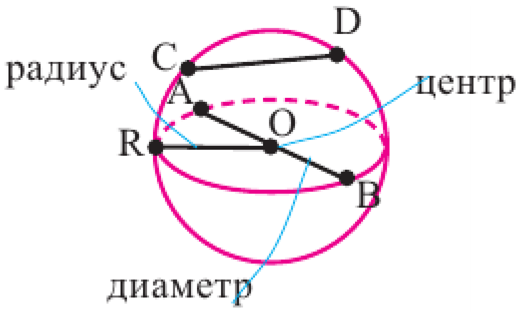
$$S_{п.п.} = 36\pi + 9\pi + 45\pi = 90\pi\ (см^2).$$





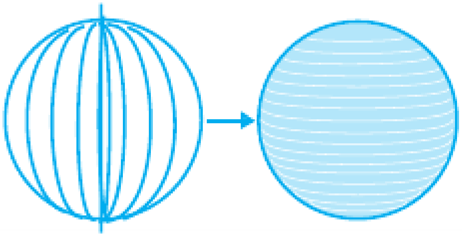
Площадь поверхности шара и его частей

Шаром называется множество всех точек пространства находящихся от данной точки на расстоянии, не больше данного. Данная точка называется **центром шара,** данное расстояние **радиусом (R) шара.**



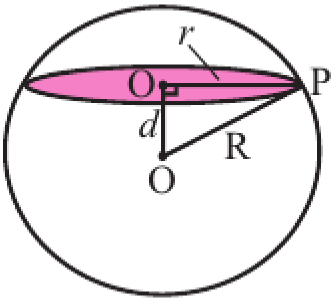
Множество всех точек, расположенных на расстоянии R от центра шара, образует поверхность шара. Поверхность шара называется **сферой.** Прямая, соединяющая любые две точки на поверхности шара, называется **хордой** (CD). Хорда, проходящая через центр шара называется **диаметром** шара (AB).

Шар получается, при вращении полукруга вокруг диаметра.



Любое сечение шара плоскостью является кругом. Центр этого круга является основанием перпендикуляра, проведенного к плоскости и проходящего через центр шара. Если R - радиус шара, d - расстояние между плоскостью и центром, а r - радиус сечения, то получим:

$$r^2 = R^2 - d^2$$



Пример №7

Шар радиуса 10 см пересечена плоскостью на расстояние

8 см от центра. Вычислите площадь сечения.

Решение: По условию $R = 10,\ d = 8.$

Тогда $S_{\text{сеч}} = \pi r^2 = \pi \cdot (R^2 - d^2) = \pi \cdot (10^2 - 8^2) = 36\pi(\text{см}^2)$

Сечение шара плоскостью, проходящей через центр шара, называется

большим кругом. Центр, радиус и диаметр большого круга равны

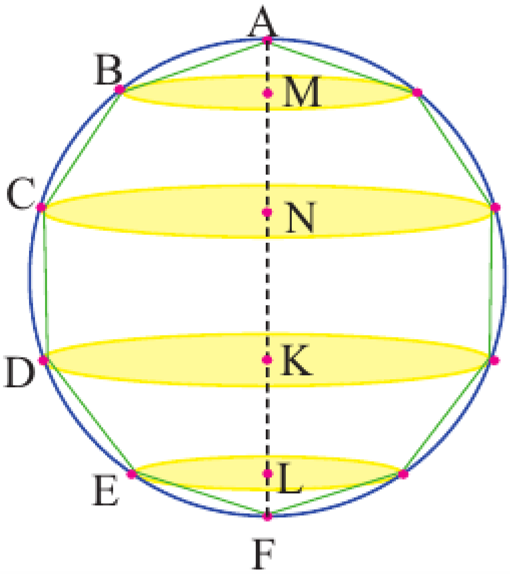
центру, радиусу и диаметру шара.

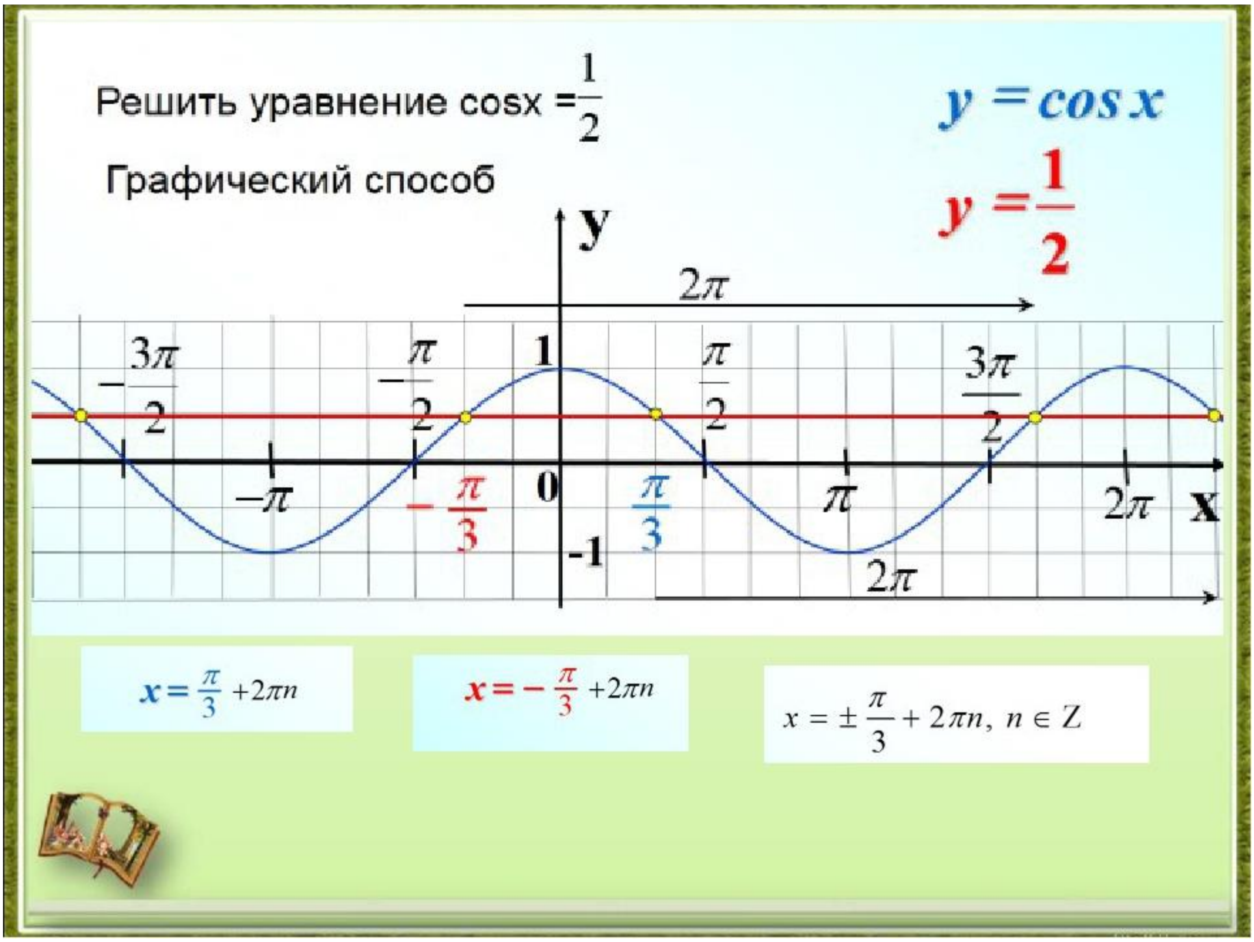
Площадь поверхности шара

Площадь поверхности шара находится по

формуле $S = 4\pi r^2$. Здесь r радиус шара.

В окружность радиусом r впишем правильный многоугольник. Поверхность шара, полученного при вращении относительно диаметра соответствующих кругов, можно рассматривать как сумму пределов боковых поверхностей фигур - конуса,усеченного конуса и цилиндра, образующие которых являются сторонами данного многоугольника.





частные случаи тригонометрических уравнений с синусом и косинусом вида:

$sinx = -1;\ sinx = 0;\ sinx = 1$ и

$cosx = -1;\ cosx = 0;\ cosx = 1$

Разберем метод их решения на примере уравнения $cosx = 0$.

Изобразим на тригонометрической окружности точку, в которой значение косинуса равно нулю, оно же является координатой по оси абсцисс. Как видим, таких точек две. Наша задача указать чему равен угол, который соответствует этим точкам на окружности.

Список литературы:

1.Тригонометрия: учебно-методическое пособие по дисциплине «Математика» для студентов 1 курса всех специальностей / сост.: Алексеева Е.В. – Ростов-на-Дону: РКРИПТ, 2015. – 60 с.

2. Алгебра и начала анализа 10-11. Под редакцией А.Н.Колмогорова. Москва, «Просвещение», 2018г.

Тема: Понятие производной

Цели и задачи:

Общеобразовательные:

-ввести понятие производной

-понятие дифференциального исчисления, характеризующее скорость изменения функции в данной точке.

-научить понимать и вычислять производную

-Геометрический и физический смысл производной

- Основные правила дифференцирования

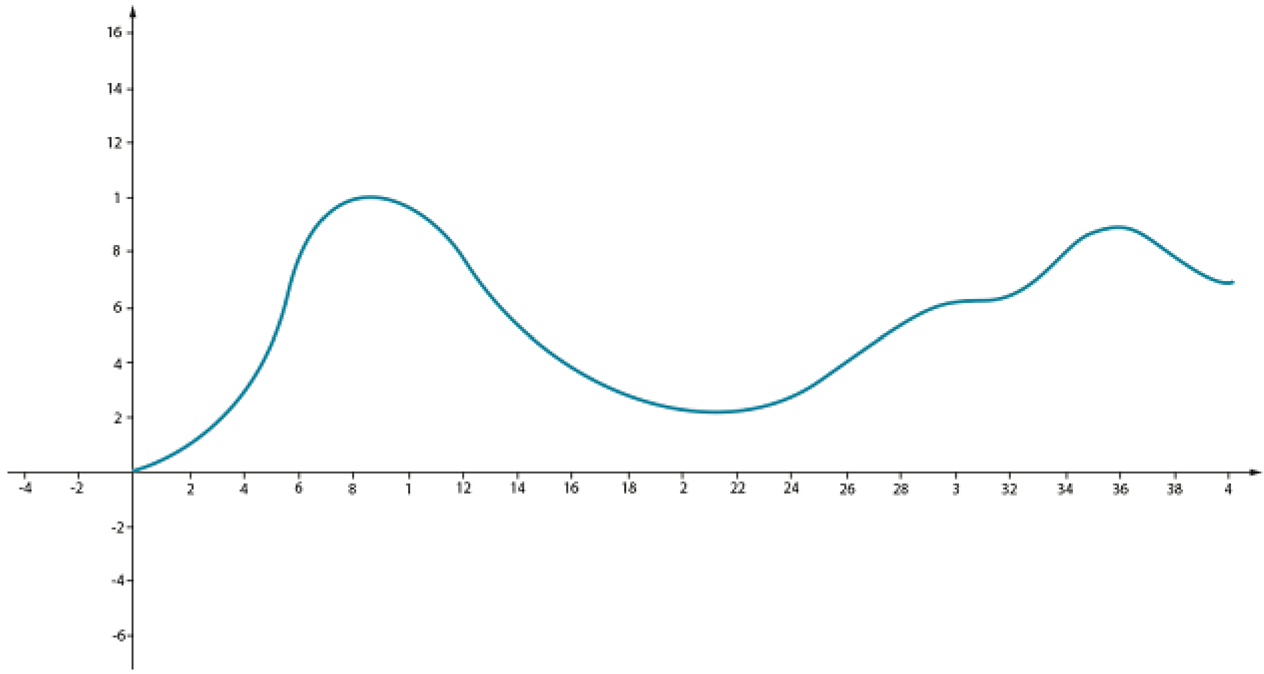
Воспитательные:

- Воспитывать чувство ответственности за качество и результат выполняемой работы, прививать сознательное отношение к труду, формировать ответственность за конечный результат.

-совершенствование познавательных действий по работе с дополнительными источниками информации (Интернет-ресурсами, периодической печатью);

Введение: Представим себе прямую дорогу, проходящую по холмистой местности. То есть она идет то вверх, то вниз, но вправо или влево не поворачивает.

Если ось Ox направить вдоль дороги горизонтально, а Oy – вертикально, то линия дороги будет очень похожа на график какой-то непрерывной функции:



Ось Ox – это некий уровень нулевой высоты, в жизни мы используем в качестве него уровень моря. Двигаясь вперед по такой дороге, мы также движемся вверх или вниз.

Также мы можем сказать: при изменении аргумента (продвижение вдоль оси абсцисс) изменяется значение функции (движение вдоль оси ординат).

А теперь давай подумаем, как определить «крутизну» нашей дороги? Что это может быть за величина?

Очень просто: **на сколько изменится высота при продвижении вперед на определенное расстояние.**

Ведь на разных участках дороги, продвигаясь вперед (вдоль оси абсцисс) на один километр, мы поднимемся или опустимся на разное количество метров относительно уровня моря (вдоль оси ординат).

Продвижение вперед обозначим Δx (читается «дельта икс»).
Греческую букву Δ (дельта) в математике обычно используют как приставку, означающую «изменение».
То есть Δx – это изменение величины x, Δy – изменение y; тогда что такое Δf?
Правильно, изменение величины f.
Важно: выражение Δx – это единое целое, одна переменная. Никогда нельзя отрывать «дельту» от «икса» или любой другой буквы!
То есть, например, $\Delta x \neq x$, $\Delta y \neq y$.
Итак, мы продвинулись вперед, по горизонтали, на Δx. Если линию дороги мы сравниваем с графиком функции $f(x)$, то как мы обозначим

подъем? Конечно, Δf. То есть, при продвижении вперед на Δx мы поднимаемся выше на Δf.

Величину Δf посчитать легко: если в начале мы находились на высоте $f1$ {{f}_{1}}$f1$, а после перемещения оказались на высоте $f2$ {{f}_{2}}$f2$, то $\Delta f=f2-f1$. Если конечная точка оказалась ниже начальной, Δf будет отрицательной – это означает, что мы не поднимаемся, а спускаемся.

Вернемся к «крутизне»: это величина, которая показывает, насколько сильно (круто) увеличивается высота при перемещении вперед на единицу расстояния:

$K=\Delta f\Delta x$.

Предположим, что на каком-то участке пути при продвижении на 1 км дорога поднимается вверх на 1 км. Тогда крутизна в этом месте равна 1.

А если дорога при продвижении на 100м опустилась на $0{,}5$км?

Тогда крутизна равна $K=-500\text{м}100\text{м}$.

А теперь рассмотрим вершину какого-нибудь холма.

Если взять начало участка за полкилометра до вершины, а конец – через полкилометра после него, видно, что высота практически одинаковая.

То есть, по нашей логике выходит, что крутизна здесь почти равна нулю, что явно не соответствует действительности.

Просто на расстоянии в 1 км может очень многое поменяться.
Нужно рассматривать более маленькие участки для более адекватной и точной оценки крутизны.

Например, если измерять изменение высоты при перемещении на один метр, результат будет намного точнее. Но и этой точности нам может быть недостаточно – ведь если посреди дороги стоит столб, мы его можем просто проскочить.Какое расстояние тогда выберем? Сантиметр? Миллиметр? **Чем меньше, тем лучше!**

В реальной жизни измерять расстояние с точностью до милиметра – более чем достаточно. Но математики всегда стремятся к совершенству.

Поэтому было придумано понятие **бесконечно малого**, то есть величина по модулю меньше любого числа, которое только можем назвать.

Например, ты скажешь: одна триллионная! Куда уж меньше?

А ты подели это число на 2 – и будет еще меньше. И так далее.
Если хотим написать, что величина x бесконечно мала, пишем так: $x\to 0$ (читаем «икс стремится к нулю»).
Очень важно понимать, **что это число не равно нулю!** Но очень близко к нему. Это значит, что на него можно делить.
Понятие, противоположное бесконечно малому – бесконечно большое ($x\to\infty$).

Если ты придумал самое большое из возможных чисел, просто умножь его на два, и получится еще больше. А бесконечность еще больше того, что получится.

Фактически бесконечно большое и бесконечно малое обратны друг другу.
Теперь вернемся к нашей дороге.

Идеально посчитанная крутизна – это куртизна, вычисленная для бесконечно малого отрезка пути, то есть:

$K=\Delta f\Delta x$ при $\Delta x\to 0$K=ΔfΔx при Δx→0.

Замечу, что при бесконечно малом перемещении изменение высоты тоже будет бесконечно мало. Но напомню, бесконечно малое – не значит равное нулю. Если поделить друг на друга бесконечно малые числа, может получиться вполне обычное число.

То есть одна малая величина может быть ровно в 2 раза больше другой.К чему все это?

Дорога, крутизна… Мы ведь не в автопробег отправляемся, а математику учим.

А в математике все точно так же, только называется по-другому.

При изучении тех или иных процессов и явлений часто возникает задача определения скорости этих процессов. Ее решение приводит к понятию производной, являющемуся основным понятием дифференциального исчисления.

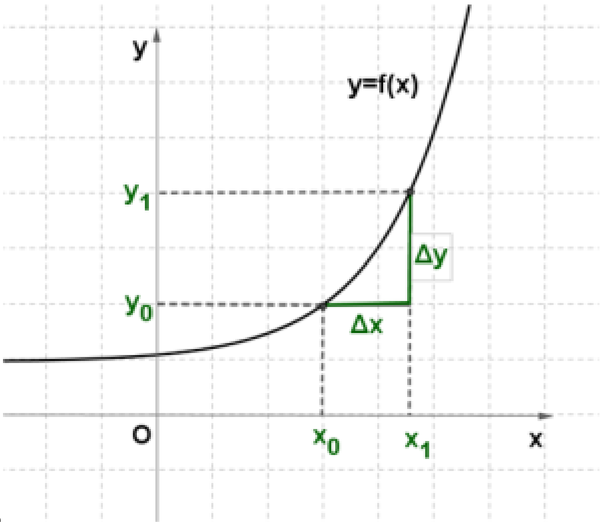
Метод дифференциального исчисления был создан в XVII и XVIII вв. С возникновением этого метода связаны имена двух великих математиков – И.Ньютона и Г.Лейбница.

Механическое истолкование производной было впервые дано И.Ньютоном. Оно заключается в следующем: скорость движения материальной точки в данный момент времени равна производной пути по времени.

Лейбниц пришел к открытию дифференциального исчисления при решении задачи о построении касательной к любой кривой, заданной уравнением.

Решение этой задачи имеет большое значение. Ведь скорость движущейся точки направлена по касательной к ее траектории, поэтому определение скорости снаряда на его траектории, скорости любой планеты на ее орбите сводится к определению направления касательной к кривой.

Рассмотрим функцию y=f(x)



Пусть функция y=f(x) определена в точках x_0 и x_1.

Разность $x_1 - x_0$ называют **приращением аргумента** (при переходе от точки x_0 к точке x_1), а разность

$f(x_1)-f(x_0)$ называют **приращением функции**.

Приращение аргумента обозначают Δx (читают: дельта икс; Δ — прописная буква греческого алфавита "дельта"; соответствующая строчная буква пишется так: δ). Приращение функции обозначают Δy или Δf.

Итак, $x_1-x_0=\Delta x$, значит, $x_1=x_0+\Delta x$.

$f(x_1)-f(x_0)=\Delta y$, значит,

$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. (1)

Пример 1.

Найдем приращение Δx и Δf в точке x_0, если $f(x)= x^2$, $x_0=2$ и $x=1,9$

Решение:

$\Delta x= x_1-x_0=1,9-2=-0,1$

$\Delta f= f(1,9) - f(2)=1,9^2-2^2=-0,39$

Ответ: Δx=-0,1; Δf =-0,39

Пример 2.

Найдем приращение Δx и Δf в точке x_0, если $f(x)= x^2$, x_0=2 и x=2,1

Решение:

$\Delta x= x_1-x_0=2,1-2=0,1$

$\Delta f= f(1,9) - f(2)=2,1^2-2^2=0,41$

Ответ: Δx=0,1; Δf =0,41

Определение. Производной функции называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

$$y' = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x}$$

Обозначение: y' или f'(x)

Если функция f(x) имеет производную в точке x, то эта функция называется дифференцируемой в этой точке. Если функция f(x) имеет производную в каждой точке некоторого промежутка, то эта функция дифференцируема на этом промежутке. Операция нахождения производной называется дифференцированием.

Физический смысл производной: если положение точки при её движении задаётся функцией пути S(t), где t – время движения, то производная функции S есть мгновенная скорость движения в момент времени t: $v(t)=S'(t)$.Таким образом, скорость – есть производная от пути по времени. или:

производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 - это скорость изменения функции f (x) в точке x_0

Производная применяется в физике для нахождения скорости по известной

функции координаты от времени,

ускорения по известной функции скорости от времени.

$\upsilon(t) = x'(t)$ - скорость,

$a(f) = \nu'(t)$ - ускорение, или $a(t) = x''$

Пример 3.

Точка движется по закону s(t)=1-2t. Найдите среднюю скорость движения за промежуток времени от t=0,8 до t=1.

Решение:

найдем Δt= 1-0,8=0,2

S(0,8)= 1-2·0,8= -0,6=S(t) , S(1)= 1-2·1= -1=S(t+Δt)

$v_{ср} = \frac{S(t_0+\Delta t)-S(t_0)}{\Delta t} = \frac{-1-(-2)}{0,2} = \frac{1}{0,2} = 5$. Ответ: $v_{ср} = 5$

Теорема 1. Для того, чтобы функция *f*(*x*) была дифференцируема в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке она имела конечную производную.

Следствие. Функция, дифференцируемая в точке, непрерывна в этой точке.

Замечание. Дифференциалом dx независимой переменной будем считать приращение Δx, т.е. dx ≡ Δx.

Список литературы:

1. Алгебра и начала анализа. Математика для техникумов. Часть 1.

   Редактор Т.А.Панькова. Москва, издательство «Наука», 1981г.

2. Математика: учебное пособие для техникумов.

   Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Москва, «Высшая школа», 1991г.

3. Практические занятия по математике: учебное пособие для техникумов.

   Богомолов Н.В. Москва, «Высшая школа», 1990г.
   Москва, издательство политической литературы, 1991г.

Тема: Правила вычисления производных.

Перечень вопросов, рассматриваемых в теме:

- разбор основных правил дифференцирования функций;
- примеры вычисления производной линейной функции;
- правила вычисления производных произведения и частного.

Определение: производной функции в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению переменной, то есть
$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

Вычисление производных основано на применении следующих **правил**, которые мы будем использовать без доказательств,

Правило 1 (производная от произведения числа на функцию). Справедливо равенство

$$(c\, f(x))' = c\, f'(x)\,,$$

где c – любое число.

Другими словами, **производная от произведения числа на функцию** равна **произведению этого числа на производную функции**.

Правило 2 (производная суммы функций). Производная суммы функций вычисляется по формуле

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x),$$

то есть **производная от суммы функций** равна **сумме производных** этих функций.

Правило 3 (производная разности функций). Производная разности функций вычисляется по формуле

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x),$$

то есть **производная от разности функций** равна **разности производных** этих функций.

Правило 4 (производная произведения двух функций). Производная произведения двух функций вычисляется по формуле

$$(f(x)\, g(x))' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x),$$

Другими словами, **производная от произведения двух функций** равна **производной от первой функции, умноженной на вторую функцию, плюс первая функция, умноженная на производную от второй функции.**

Правило 5 (производная частного двух функций). Производная от дроби (частного двух функций) вычисляется по формуле

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

Определение. Рассмотрим функции $f(x)$ и $g(x)$. ***Сложной функцией*** или «функцией от функции» называют функцию вида

$$f(g(x))$$

При этом функцию $f(x)$ называют **внешней функцией**, а функцию $g(x)$ – **внутренней функцией**.

Правило 6 (производная сложной функции). Производная сложной функции вычисляется по формуле

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))\, g'(x)$$

Другими словами, для того, чтобы найти **производную от сложной функции** $f(g(x))$ **в точке** x нужно **умножить производную внешней функции, вычисленную в точке** $g(x)$**, на производную внутренней функции, вычисленную в точке** x**.**

Таблица производных часто встречающихся функций

В следующей таблице приведены **формулы для производных от степенных, показательных (экспоненциальных), логарифмических, тригонометрических и обратных тригонометрических функций**.

Функция	**Формула для производной**	**Название формулы**
$y = c$, где c – любое число	$y' = 0$	Производная от постоянной функции
$y = x^c$, где c – любое число	$y' = c\,x^{c-1}$	Производная степенной функции
$y = e^x$	$y' = e^x$	Производная от экспоненты (показательной

		функции с основанием e)
$y = a^x$ где a – любое положительное число, не равное 1	$y' = a^x \ln a$	Производная от показательной функции с основанием a
$y = \ln x, \quad x > 0$	$y' = \frac{1}{x}, \quad x > 0$	Производная от натурального логарифма
$y = \log_a x, \quad x > 0$ где a – любое положительное число, не равное 1	$y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}, \quad x > 0$	Производная от логарифма по основанию a
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	Производная син уса
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	Производная кос инуса
$y = \operatorname{tg} x$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n = 0, \pm$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$	Производная тан генса
$y = \operatorname{ctg} x$, $x \neq \pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, $x \neq \pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$	Производная кот ангенса
$y = \arcsin x, \quad \lvert x \rvert \leq 1$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \lvert x \rvert < 1$	Производная арк синуса
$y = \arccos x, \quad \lvert x \rvert \leq 1$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \lvert x \rvert < 1$	Производная арк косинуса

$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$	Производная арк тангенса
$y = \operatorname{arcctg} x$	$y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	Производная арк котангенса

Таблица производных сложных функций

В следующей таблице приведены формулы для производных сложных функций.

В отдельных строках (с желтым фоном) приведены формулы для производных сложных функций в случае, когда **внутренняя функция** является линейной функцией и имеет вид $f(x) = kx + b$, где k и b – любые числа, $k \neq 0$.

Функция	**Формула для производной**
$y = (kx + b)^c$, где c – любое число.	$y' = kc\,(kx + b)^{c-1}$,
$y = (f(x))^c$, где c – любое число.	$y' = c \cdot (f(x))^{c-1} \cdot f'(x)$
$y = e^{kx + b}$	$y = ke^{kx + b}$
$y = e^{f(x)}$	$y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$
$y = a^{kx + b}$ где a – любое положительное число, не равное 1	$\left(a^{kx+b}\right)' = a^{kx+b} \cdot \ln a \cdot k$

$y = a^{f(x)}$ где a – любое положительное число, не равное 1	$y' = a^{f(x)} \cdot \ln a \cdot f'(x)$
$y = \ln(kx + b)$, $kx + b > 0$	$\left(\ln(kx+b)\right)' = \dfrac{k}{kx+b}$, $kx + b > 0$
$y = \ln(f(x))$, $f(x) > 0$	$y' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$, $f(x) > 0$
$y = \log_a(kx + b)$, $kx + b > 0$ где a – любое положительное число, не равное 1	$\left(\ln(kx+b)\right)' = \dfrac{k}{(kx+b)\cdot \ln a}$, $kx + b > 0$
$y = \log_a(f(x))$, $f(x) > 0$ где a – любое положительное число, не равное 1	$y' = \dfrac{f'(x)}{f(x)\cdot \ln a}$, $f(x) > 0$
$y = \sin(kx + b)$	$y' = k\cos(kx + b)$
$y = \sin(f(x))$	$y' = \cos(f(x)) \cdot f'(x)$
$y = \cos(kx + b)$	$y' = -k\sin(kx + b)$
$y = \cos(f(x))$	$y' = -\sin(f(x)) \cdot f'(x)$

$y = \mathrm{tg}\,(kx + b),$ где $kx + b \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$	$y' = \frac{k}{\cos^2(kx+b)}$, $kx + b \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
$y = \mathrm{tg}\,(f(x)),$ где $f(x) \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$	$y' = \frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}$, $f(x) \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
$y = \mathrm{ctg}\,(kx + b),$ где $kx + b \neq n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$	$y' = -\frac{k}{\sin^2(kx+b)}$, $kx + b \neq n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
$y = \mathrm{ctg}\,(f(x)),$ где $f(x) \neq \pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$	$y' = -\frac{f'(x)}{\sin^2(f(x))}$, $f(x) \neq \pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Пример 1. Найдем производную функции: $f(x) = 2x^2 + 4x$

Решение:

производная суммы равна сумме производных. Найдем производную каждого слагаемого

$f'(x) = (2x^2 + 4x)' = (2x^2)' + (4x)'$

$f'(x) = 4x + 4$. Ответ: $f'(x) = 4x + 4$

Пример 2.Найти производную функции $f(x)=8x^3+3x^2-x$.

Решение:

$f(x)=8x^3+3x^2-x$

$f'(x)=(8x^3)'+(3x^2)'-x'$

Рассмотрим каждый член многочлена по отдельности

$(8x^3)'=8(x^3)'=8\cdot 3x^2=24x^2$

$(3x^2)'=3(x^2)'=3\cdot x=6x$

$(-x)'=-(x) = -1$

$f'(x)=(8x^3)'+(3x^2)'-x'=24x^2+6x-1$.   Ответ: $f'(x)=24x^2+6x-1$.

Пример 3. Найти производную функции $f(x)=(3x-4)(4-5x)$.

Решение:

Воспользуемся формулой производной произведения:

$f'(x)=(3x-4)'(4-5x)+(3x-4)(4-5x)'=3(4-5x)-5(3x-4)=12-15x-15x+20= 32$Ответ: $f'(x)=32$

Пример 4. Найти производную функции $f(x)=\frac{3x-2}{x+3}$

Решение:

Воспользуемся формулой производной частного:

$$f'(x)=\frac{(3x-2)'(x+3)-(3x-2)(x+3)'}{(x+3)^2}=\frac{3(x+3)-(3x+2)}{(x+3)^2}=\frac{3x+9-3x-2}{(x+3)^2}=\frac{7}{(x+3)^2}$$

Ответ: $f'(x)=\frac{7}{(x+3)^2}$

Пример 5. Найти производную функции $F(x)=(2x-1)^2$

Решение:

По правилу нахождения производной от сложной функции, получаем:

$F'(x)=((2x-1)^2)'\cdot(2x-1)=2(2x-1)\cdot 2=4(2x-1)=8x-4$. Ответ: $F'(x)=8x-4$.

Самостоятельная работа

1. Пользуясь определением, найдите производную функции $f(x)=4x-5$.
2. Найдите: а) $f'(x)$; б) $f'(-1)$, если $f(x)=x^3-3x^2+5x+3$.
3. Найдите: а) $f'(x)$; б) $f'(0)$, если $f(x)=e^x\cdot\cos x$.
4. Найдите: а) $f'(x)$; б) $f'(4)$, если $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x-3}$.
5. Найдите: а) $f'(x)$; б) $f'(16)$, если $f(x)=\sqrt[4]{x}$.

Задание 1. Найдите производные функций:

1. $f(x) = 3x+5$
2. $f(x) = 4x^2 - 5x^3 + 9x$
3. $f(x) = \frac{3}{x} + \frac{x}{3}$
4. $f(x) = \frac{2}{x^2} + \frac{5}{x^3} - \frac{7}{x}$
5. $f(x) = \sqrt{x} + 4$
6. $f(x) = \frac{1}{3x} + \frac{1}{2x^2} + \sqrt{4x}$

литература:

Колягин Ю.М., Ткачева М.В., Федорова Н.Е. и др., под ред. Жижченко А.Б. Алгебра и начала математического анализа (базовый и профильный уровни) 11 кл. – М.: Просвещение, 2018.

Тема: Уравнение касательной.

Цели:

Образовательные: Ввести понятия геометрический и физический смысл производной, уравнение касательной. Научить применять эти понятия на практики.

Воспитательные: Воспитывать чувство ответственности за качество и результат выполняемой работы, прививать сознательное отношение к труду, формировать ответственность за конечный результат

Геометрический и физический смысл производной

Повторение.

Определение производной.

Производная функции-это отношение приращения функции к приращению аргумента при бесконечно малом приращение аргумента.

Приращением в математике называют изменение.

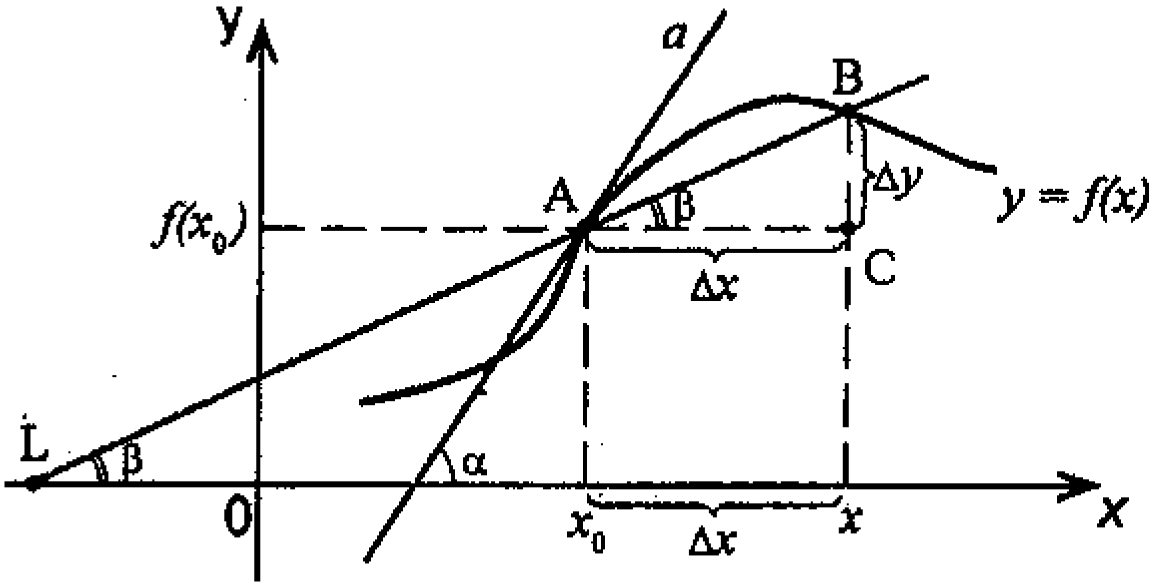
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$ где $\Delta x = x - x_0$.

Функцию, имеющую производную в точке, называют **дифференцируемой** в

этой точке

Нахождение производной данной функции *f* называется **дифференцированием**.

Рассмотрим график функции y = f (x), дифференцируемой в окрестностях точки x_0



Рассмотрим произвольную прямую, проходящую через точку графика функции - точку A(x_0, f (x_0)) и пересекающую график в некоторой точке B(x;f(x)). Такая прямая (AB) называется секущей. Из ΔABC: AC = Δx; BC =Δy; tgβ=Δy/Δx .

Так как AC || Ox, то ∠ALO = ∠BAC = β (как соответственные при параллельных). Но ∠ALO - это угол наклона секущей AB к положительному направлению оси Ox. Значит, tgβ = k - угловой коэффициент прямой AB.

Теперь будем уменьшать Δx, т.е. Δx→ 0. При этом точка B будет приближаться к точке A по графику, а секущая AB будет поворачиваться. Предельным положением секущей AB при Δx→ 0 будет прямая (a), называемая касательной к графику функции y = f (x) в точке A.

Если перейти к пределу при $\Delta x \to 0$ в равенстве $tg\beta = \Delta y/\Delta x$, то получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} tg\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$ или $tg\alpha = f'(x_0)$, так как $$\lim_{\Delta x \to 0} tg\beta = tg\alpha$$

α-угол наклона касательной к положительному направлению оси Ox

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

, по определению производной. Но $tg\alpha = k$ - угловой коэффициент касательной, значит, $k = tg\alpha = f'(x_0)$. Итак, геометрический смысл производной заключается в следующем:

Производная функции в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции, проведенной в точке с абсциссой x_0.

Когда точка A приближается вдоль кривой к точке B, секущая AB стремится к касательной, причем угол α стремится к углу φ между касательной и положительным направлением оси Ox. В соответствии с определением касательной получаем, что угловой коэффициент

Итак, ***k = tg φ= f '(*Xo*).***

Уравнение касательной $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

Здесь $f'(x_0)$ — значение производной в точке x_0, а $f(x_0)$ — значение самой функции. Точка движется прямолинейно по закону *s = s(t),* где *s* – перемещение точки за время *t*. **Механический смысл производной:** мгновенная скорость точки в данный момент времени равна значению производной от закона движения

$$v(t) = s'(t).$$

Второй физический смысл производной: ускорение точки в данный момент времени равно значению второй производной от закона движения

$$a(t) = v'(t) = (s'(t)').$$

Производную от производной *f '(* c *)* мы будем называть производной второго порядка или второй производной и обозначать *f ''(x).* Значит, *a(t) = s''(t).* *Физический смысл производной заключается в следующем: производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 - это скорость изменения функции $f(x)$ в точке x_0.*

Производная применяется в физике для нахождения скорости по известной функции координаты от времени,ускорения по известной функции скорости от времени.

$\upsilon(t) = x'(t)$ - скорость, $a(f) = \nu'(t)$ - ускорение, или $a(t) = x''(t)$.

Формулы дифференцирования:

$c' = 0$, $x' = 1$, $(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$,

Задача № 1. Найти среднюю скорость изменения функции $y = 3x^2 - 6$

при изменении x от = 3 до = 3,5.

Решение. 1). Найдем приращение аргумента: $\Delta x = - = 3{,}5 - 3 = 0{,}5$;

2). Вычислим приращение функции: $\Delta y = - = 3^2 - 6 - 3^2 + 6 = = 3(^2 - ^2) = 9{,}75$.

3). Найдем среднюю скорость изменения функции: $\Delta y/\Delta x = 9{,}75/0{,}5 = 19{,}5$.

Ответ: 19,5.

Задача № 2. Прямолинейное движение точки задано уравнением $s = 3t^2 - 2t + 5$, где t

дано в секундах, а s – в метрах. Найти скорость движения точки

в момент t = 5с.

Решение. 1). Найдем среднюю скорость движения точки:

$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t) = 3(t + \Delta t)^2 - 2(t + \Delta t) + 5 - 3t^2 + 2t - 5 = 6t\Delta t + 3(\Delta t)^2 - 2\Delta t$.

2). Найдем истинную скорость движения точки в момент времени t:

3). Найдем скорость движения точки в момент времени t = 5с:

$v = 6t - 2 = 6\cdot 5 - 2 = 28$ м/с.   Ответ: 28 м/с.

Задача № 3 . Материальная точка движется по закону $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 2$. Выведите формулу для вычисления скорости в любой момент времени и найдите скорость в момент t = 5с. (Путь в метрах.)

Решение. 1). Найдем производную: $v(t) = x'(t) = (\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 2)' = t^2 - t$.

2). Найдем скорость в момент t = 5с: $v(5) = 5^2 - 5 = 25 - 5 = 20$(м/с).

Ответ: v =20 м/с.

Задача № 5. Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к параболе $y = 2x^2$ в точке, абсцисса которой равна 1.

Решение. 1). Найдем производную: $f'(x) = (2x^2)' = 2 \cdot 2x = 4x$.

2). $k = f'(1) = 4\cdot 1 = 4$. Ответ: k = 4.

Задача № 6. Составить уравнение касательной к графику функции $y = x^2 - 2x$ в точке с абсциссой Хо = 3.

Решение. Уравнение касательной: $\underline{y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)}$,

1) $f(3) = 3^2 - 2\cdot 3 = 3$.

2) $f'(x) = (x^2 - 2x)' = 2x - 2$.

3) $f'(3) = 2\cdot3 - 2 = 4$.

4) $y = 3 + 4(x - 3) = 3 + 4x - 12 = 4x - 9$.

$y = 4x - 9$ – уравнение касательной. Ответ: $y = 4x - 9$.

Задача № 7. Найти координаты точки, в которой касательная к параболе

$y = x^2 - x - 12$ образует с осью Ох угол 45˚.

Решение. 1). $\text{tg}\,\alpha = y'(x) = (x^2 - x - 12)' = 2x - 1$.

2). Так как $\alpha = 45^\circ$, то $\text{tg}45^\circ = 2x - 1$, $1 = 2x - 1$, $x = 1$.

3) $y(1) = 1 - 1 - 12 = - 12$. M(1;12) – искомая точка. Ответ: M(1;12).

№ **8** .Вычислить значение производной а). $f(x) = x^3$, Хо = 2; Хо = – 1, 5.

Решение. 1) $f'(x) = (x^3)' = 3x^2$.

2) при Хо = 2 имеем $f'(2) = 3\cdot2^2 = 12$;

3) при Хо = – 1, 5 имеем $f'(-1,5) = 3\cdot(-1,5)^2 = 3\cdot2,25 = 6,75$.

№ **9.** $f(x) = 4 - 2x$, Хо = 0,5; Хо = – 3.

Решение. 1) $f'(x) = (4 - 2x)' = 0 - 2\cdot1 = - 2$.

2) при Хо = 0,5 имеем $f'(0,5) = 0,5$;

3) при Хо = – 3 имеем $f'(-3) = - 3$.

№10. На параболе $y=x^2-2x-8$ найти точку М, в которой касательная к ней параллельна прямой $4x+y+4=0$.

Решение: Определим угловой коэффициент касательной к параболе $y=x^2-2x-8$: $k=y'=(x^2-2x-8)'=2x-2$.Найдем угловой коэффициент прямой $4x+y+4=0$:$y=-4x-4$,$k=4$. Касательная к параболе и данная прямая по условию параллельны. Следовательно, их угловые коэффициенты равны, т.е. $2x-2=-4$; $x=-1$ – абсцисса точки касания.

С-38. Вычисление производных

Вариант 4

Найдите производную функции:

1. $y = -0,5x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 2x$;

2. $y = (4\sqrt{x} + 3)\left(1 - \frac{1}{x}\right)$;

3. $y = -\frac{1}{x^3}$;

4. $y = \frac{3}{\sin x}$;

5. $y = \frac{x^2 + 4}{\cos x}$;

6. $y = x^2\,\text{tg}\,x$.

ТЕМА. Возрастание и убывание функции.

Цели и задачи:

1) Нахождение промежутков монотонности функции,

2) Определение алгоритма нахождения промежутков возрастания и убывания функции,

3) Решение задачи на нахождения промежутков возрастания и убывания функции

Алгоритм нахождения промежутков возрастания и убывания функции y = f(x)

1. Найти D(f)
2. Найти f‘(x).
3. Определить, при каких значениях xf‘(x) ≥ 0 (на этих промежутках функция возрастает); при каких значениях x f‘(x) ≤ 0 (на этих промежутках функция убывает))

Теоретический материал:

1. Функция y = f(x), определенная на промежутке X, называется возрастающей на этом промежутке, если для любой пары чисел x_1 и x_2 из этого промежутка из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$

2. Функция y = f(x), определенная на промежутке X, называется убывающей на этом промежутке, если для любой пары чисел x_1 и x_2 из этого промежутка из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$; **Теоремы:**

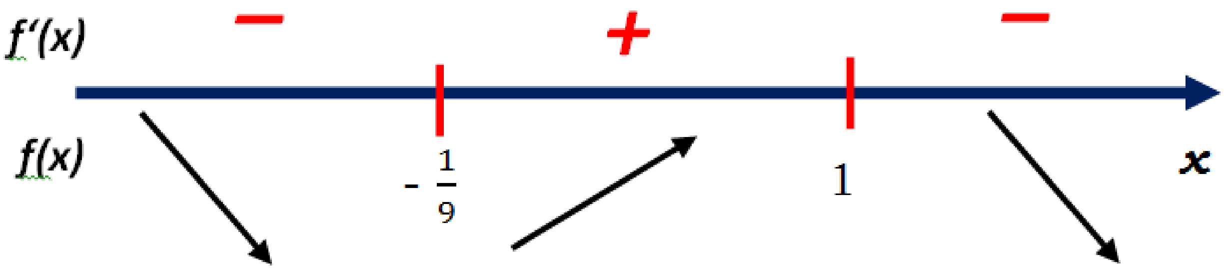
1. Если во всех точках открытого промежутка X выполняется неравенство f‘(x) ≥ 0 (причем равенство f‘(x) = 0 либо не выполняется, либо выполняется лишь в конечном множестве точек),то функция y = f(x) возрастает на промежутке X.
2. Если во всех точках открытого промежутка X выполняется неравенство f‘(x) ≤ 0 (причем равенство f‘(x) = 0 либо не выполняется, либо выполняется лишь в конечном множестве точек),то функция y = f(x) убывает на промежуткеX

Определите промежутки монотонности функции $y = -3x^3 + 4x^2 + x - 10$

Решение1.Найдем область определения функции. D(y) = $(-\infty;\ +\infty)$

2.Найдем производную функции. $y' = -9x^2 + 8x + 1$ y’ = (x – 1)(-9x – 1)

3.Определим, на каких промежутках производная положительна (на этих промежутках функция возрастает), на каких – отрицательна (на этих промежутках функция убывает).Применим для этого метод интервалов.



Ответ: Функция возрастает на $\left[-\frac{1}{9};1\right]$.Функция убывает на $(-\infty;-\frac{1}{9}]$ и на $[1;\ +\infty)$.

№2. Определите промежутки монотонности функциииу = x^5–$5x^4$ +$5x^3$ – 4.   Решение:

1. $D(y) = (-\infty; +\infty)$
2. $y' = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2$ y' =$5x^2(x-1)(x-3)$
1. Функция возрастает на $(-\infty;1]$ина $[3;+\infty)$; функция убывает на $[1;\ 3]$.

Ответ: Функция возрастает на $(-\infty;1]$и на $[3;+\infty)$;функция убывает на $[1;\ 3]$.

Задание 2. Найдите производные функций:

1. $f(x) = (3x+5)(x-3)$
2. $f(x) = (x^2- 5x)(x^3-x^2)$
3. $f(x) = \frac{3+x}{x^3}$
4. $f(x) = \frac{2x^2-5}{x+1}$
5. $f(x) = (\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-2)$
6. $f(x) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{x})4x^2$

Самостоятельная работа по теме «Признак возрастания (убывания) функции».

Справочный материал:

Признак возрастания функции: Если производная $f'(x) > 0$ в каждой точке некоторого интервала, то функция *f(x)* возрастает на всем этом интервале.

Признак убывания функции: Если производная $f'(x) < 0$ в каждой точке некоторого интервала, то функция *f(x)* убывает на всем этом интервале.

Примеры:

1. **Найдите промежутки возрастания и убывания функции** $y = x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 3$.

РЕШЕНИЕ:

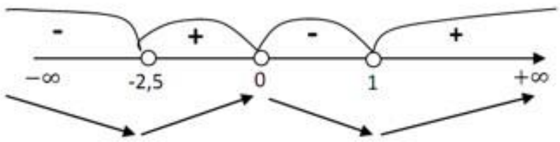
$y' = (x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 3)' = 4x^3 + 2 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x - 0 = 4x^3 + 6x^2 - 10x$

Найдем промежутки возрастания (убывания) с помощью метода интервалов, для этого найдем корни уравнения $4x^3 + 6x^2 - 10x = 0$

$x(4x^2 + 6x - 10) = 0 \to x_1 = 0$ или $4x^2 + 6x - 10 = 0$

$D = 6^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-10) = 36 + 160 = 196 = 14^2$

$x_{2,3} = \frac{-6 \pm \sqrt{196}}{2 \cdot 4} = \frac{-6 \pm 14}{8} \Rightarrow \quad x_2 = \frac{-6-14}{8} = -\frac{20}{8} = -\frac{5}{2} = -2{,}5; \quad x_3 = \frac{-6+14}{8} = 1$



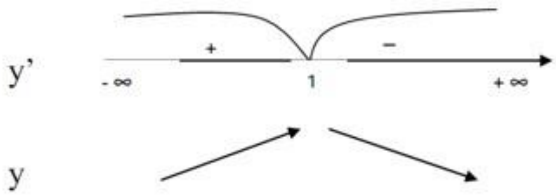
Ответ: функция убывает при $x \in (-\infty; -2{,}5] \cup [0; 1]$

функция возрастает при $x \in [-2{,}5; 0] \cup [1; +\infty)$

2. **Найдите промежутки возрастания и убывания функции** $y = \frac{2x}{e^x}$.

РЕШЕНИЕ: $y' = \left(\frac{2x}{e^x}\right)' = \frac{(2x)' \cdot e^x - 2x \cdot (e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(2-2x)}{(e^x)^2} = \frac{2-2x}{e^x}$

Решим неравенство $\frac{2-2x}{e^x} > 0$, т.к. $e^x > 0$ при $x \in (-\infty; +\infty) \Rightarrow \frac{2-2x}{e^x} > 0 \Leftrightarrow 2 - 2x > 0$



Ответ: функция возрастает при $x \in (-\infty; 1]$

функция убывает при $x \in [1; +\infty)$

Задания для самостоятельного решения: **Найдите промежутки возрастания и убывания функций:**

1. $y = x^4 + x^3 - 3{,}5x^2 + 2$
2. $y = -x^4 + 4x^2 - 3$
3. $y = -x^3 - 3x^2 + 9x - 2$
4. $y = \frac{2x^3}{3} + 5x^2 - 12x + 4$
5. $y = \frac{2x^3}{3} - 7x^2 + 12x - 9$
6. $y = e^x - x$

ТЕМА: Экстремумы функции.

Цели и задачи:

1) Определение точек максимума и минимума функции

2) Определение точки экстремума функции

3) Условия достаточные для нахождения точек экстремума функции

Возрастание функции. Функция y=f(x) возрастает на интервале X, если для любых x_1 и x_2, $x_1 > x_2$ из этого промежутка выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$. Другими словами – большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Максимум функции. Значение функции в точке максимума называют максимумом функции

Минимум функции. Значение функции в точке минимума называют минимумом функции

Производная (функции в точке) — основное понятие дифференциального исчисления, которое характеризует скорость изменения функции (в конкретной точке).

Точка максимума функции. Точку x_0 называют точкой максимума функции y = f(x), если для всех x из ее окрестности справедливо неравенство $f(x_1) \le f(x_2)$.

Точка минимума функции. Точку x_0 называют точкой минимума функции y = f(x), если для всех x из ее окрестности справедливо неравенство $f(x_1) \ge f(x_2)$.

Точки экстремума функции. Точки минимума и максимума называют точками экстремума.

Убывание функции. Функция y = f(x) убывает на интервале X, если для любых x_1 и x_2, $x_1 > x_2$ из этого промежутка выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$. Другими словами – большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Алгоритм исследования функции на монотонность и экстремумы:

1) Найти область определения функции D(f)

2) Найти f' (x).

3) Найти стационарные (f'(x) = 0) и критические (f'(x) не существует) точки функции y = f(x).

4) Отметить стационарные и критические точки на числовой прямой и определить знаки производной на получившихся промежутках.

5) Сделать выводы о монотонности функции и точках ее экстремума.

Точки, в которых происходит изменение характера монотонности функции – это ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА.

Определение 1. Точку $x=x_0$ называют *точкой минимума* функции y=f(x), если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.

Определение 2. Точку $x=x_0$ называют *точкой максимума* функции y=f(x), если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.

Точки максимума и минимума – *точки экстремума.*

Функция может иметь неограниченное количество экстремумов.

Критическая точка – это точка, производная в которой равна **0** или не существует.

Важно помнить, что любая точка экстремума является критической точкой, но не всякая критическая является экстремальной.

Алгоритм нахождения максимума/минимума функции на отрезке:

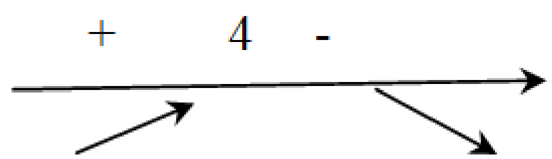
1. найти экстремальные точки функции, принадлежащие отрезку,
2. найти значение функции в экстремальных точках из пункта 1 и в концах отрезка,
3. выбрать из полученных значений максимальное и минимальное.

Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля

№1. Определите промежуток монотонности функции $y=x^2 -8x +5$

Решение: Найдем производную заданной функции: $y'=2x-8$

$2x-8=0$



$x=4$

Определяем знак производной функции и изобразим на рисунке, следовательно, функция возрастает при $x\in (4;+\infty)$; убывает при $x\in (-\infty;4)$

Ответ: возрастает при $x\in (4;+\infty)$; убывает при $x\in (-\infty;4)$

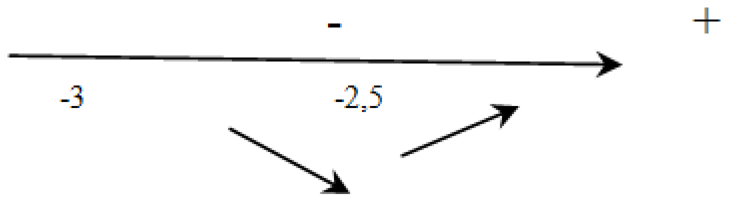
№2. Найдите точку минимума функции $y= 2x-\ln(x+3)+9$

Решение: Найдем производную заданной функции: $y' = 2 - \frac{1}{x+3}$

Найдем нули производной: $2 - \frac{1}{x+3} = 0$

$x=-2,5$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



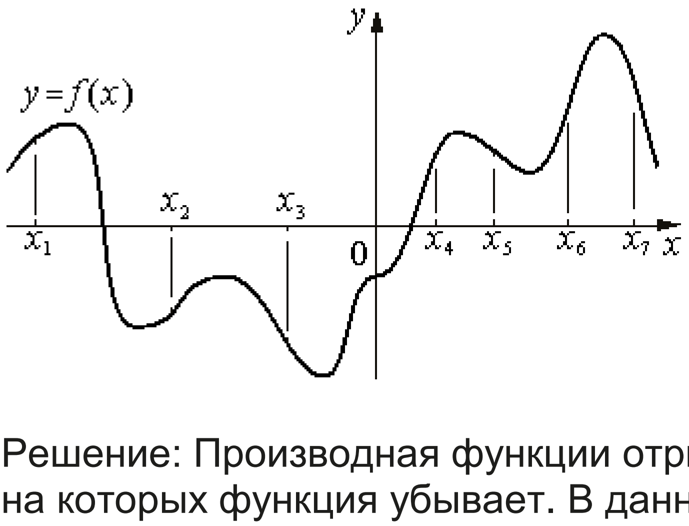
Ответ: -2,5 точка min

№3. Материальная точка движется прямолинейно по закону x(t) = $10t^2 - 48t + 15$, где x - расстояние от точки отсчета в метрах, t - время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите ее скорость (в метрах в секунду) в момент времени t = 3с.

Решение: Если нас интересует движение автомобиля, то, принимая в качестве функции зависимость пройденного расстояния от времени, с помощью производной мы получим зависимость скорости от времени.

V=x'(t)= 20t – 48. Подставляем вместо t 3с и получаем ответ. V=12 м\с .Ответ: V=12 м\с

№4. На рисунке изображен график функции. На оси абсцисс отмечены семь точек: x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7. Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.



Решение: Производная функции отрицательна на тех интервалах, на которых функция убывает. В данном случае это точки x3,x5,x7. Следовательно, таких точек 3Ответ: 3

Значение функции в точке минимума обычно обозначают y_{min}.
Значение функции в точке максимума обозначают y_{max}.

Точки максимума и минимума объединяют общим термином – ***точки экстремума.***

Как искать точки экстремума?

В точках -8;-4;1;4 – производная равна 0 –стационарные;

7;11 – не существует – критические.

<u>Теорема.</u> Если функция y=f(x) имеет экстремум в точке $x=x_0$, то в этой точке производная функции либо равна нулю, либо не существует.

Внутренние точки области определения функции, в которых производная функции равна нулю, называются *стационарными*.

Внутренние точки области определения функции, в которых функция непрерывна, но производная не существует – *критическими*.

Верна ли обратная теорема: если $x=x_0$ – стационарная или критическая точка, то в этой точке имеется экстремум.

Посмотрим наш график:

Точка x=-2 – стационарная – экстремума нет;

x=6 – критическая – экстремума нет.

Как же узнать есть ли в стационарной или критической точке экстремум?

Для этого рассмотрим схемы у графика, дописав над осью OX y и проанализировав поведение функции в окрестностях точек.

Наши рассуждения могут служить подтверждением справедливости следующей теоремы.

Теорема:

Пусть функция y=f(x) непрерывна на промежутке X и имеет внутри промежутка стационарную или критическую точку $x=x_0$. Тогда:

а) если у этой точке существует такая окрестность, в которой при $x<x_0$ выполняется неравенство $f'(x)<0$, а при $x>x_0$ – неравенство $f'(x)>0$, то $x=x_0$ – точка минимума функции y=f(x);

б) если у этой точке существует такая окрестность, в которой при $x<x_0$ выполняется неравенство $f'(x)>0$, а при $x>x_0$ – неравенство $f'(x)<0$, то $x=x_0$ – точка максимума функции y=f(x);

в) если у этой точки существует такая окрестность, что в ней и слева и справа от точки x_0 знаки производной одинаковы, то в точке x_0 экстремума нет.

Другими словами

- Функция имеет максимум там, где производная равна нулю и меняет знак с «плюса» на «минус»

- Функция имеет минимум там, где производная равна нулю и меняет знак с «минуса» на «плюс».

Как найти точки максимумов и минимумов если известна формула функции.

алгоритм решения:

1. Найдите производную функции f′(x).
2. Найдите корни уравнения f′(x)=0,
3. Нарисуйте ось х и отметьте на ней точки полученные в пункте 2, изобразите дугами промежутки, на которые разбивается ось. Подпишите над осью f′(x), а под осью f(x).
4. Определите знак производной в каждом промежутке (методом интервалов).
5. Поставьте знак производной в каждом промежутке (над осью), а стрелкой укажите возрастание (↗) или убывание (↘) функции (под осью).
6. Определите, как изменился знак производной при переходе через точки, полученные в пункте 2:
   - если f′(x) изменила знак с «+» на «–», то x1 – точка максимума;
   - если f′(x) изменила знак с «–» на «+», то x3 – точка минимума;
   - если f′(x) не изменила знак, то x2 – может быть точкой перегиба.

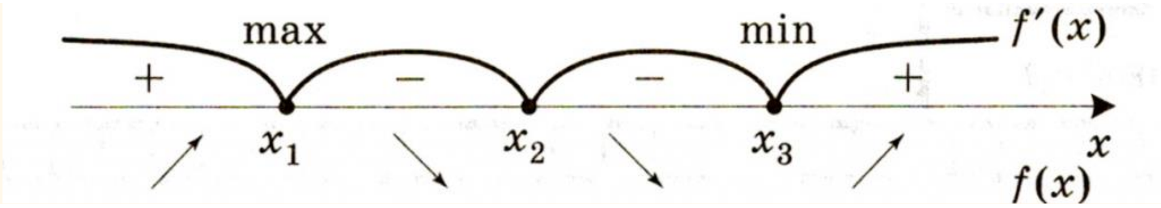


Схема применения производной для нахождения интервалов монотонности и экстремумов

Пример: $y=2x^3-3x^2-36x+5$

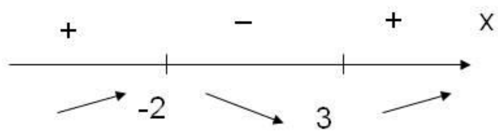
- Найти область определения функции и интервалы, на которых функция непрерывна.
- Найти производную *f'(x)*.
- Найти критические точки.
- В каждом из интервалов, на которые область определения разбивается критическими точками, определить знак производной и вид монотонности функции.
- Относительно каждой критической точки определить, является ли она точкой максимума, минимума или не является точкой экстремума.
- Записать результат исследования: промежутки монотонности и экстремумы.

$1)\ D(y)=R$

$2)\ y'(x)=6x^2-6x-36$

$3)\ y'(x)=0 \quad x_1=-2;\ x_2=3$

4)

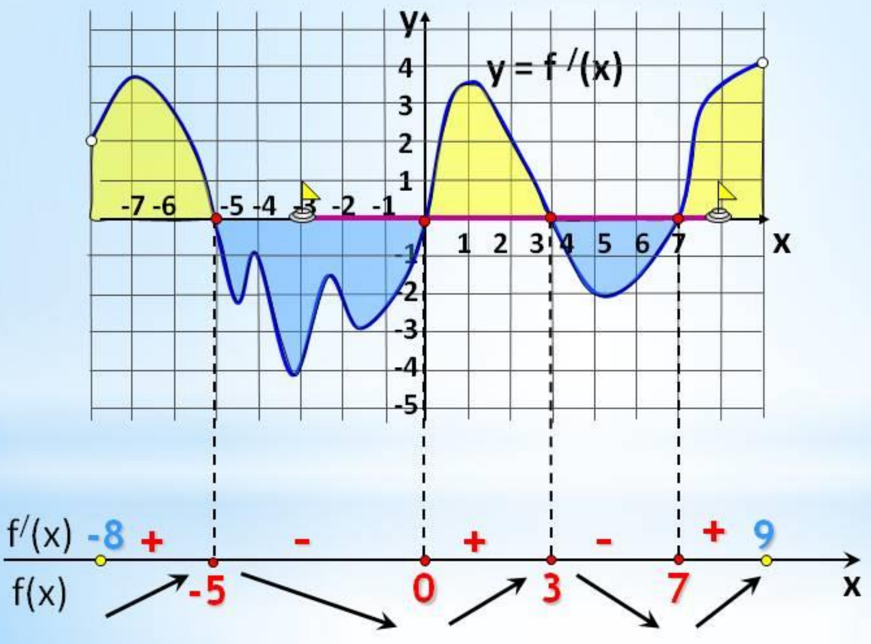


5) x=-2 точка максимума;
x=3 точка минимума.

Ответ: f(x) возрастает на $(-\infty; -2)$ и на $(3; \infty)$;
f(x) убывает на $(-2;3)$;
xmax=-2, ymax=f(-2)=49;
xmin=3, ymin=f(3)=-76.

Пример

Найдите количество точек экстремума функции y =f (x) на отрезке [– 3; 8]



Ответ: 3.

Задачи для самостоятельного решения

а) Найти точки экстремума функции и определить их характер: y= $5x^3 - 15x - 5$.
б) Найти точки экстремума функции и определить их характер:
$$y = 4\sqrt{2x-1} - x$$

в) Найти точки экстремума функции и определить их характер: y= 2sin(x) - x

при π ≤ x ≤ 3π.

г) Найти точки экстремума функции и определить их характер: $y = \dfrac{x^2+27}{x}$

е) Найти точки экстремума функции и определить их характер y= $\dfrac{x^2}{x-2}$, и промежутки монотонности.

ТЕМА. Наибольшее и наименьшее значения функции.

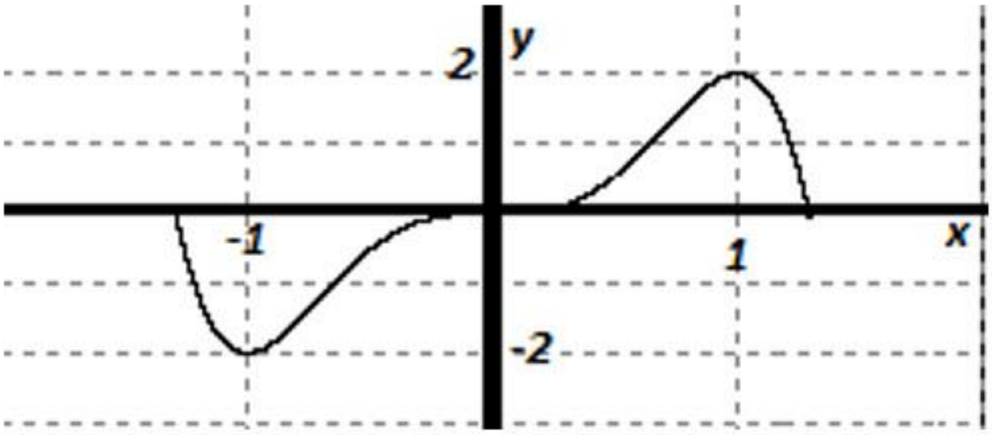
Цели и задачи:

1) Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции,

2) Определение алгоритма нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке,

3) Рассмотреть прикладные задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значений

Повторение:
Ребята, мы с вами находили наибольшее и наименьшее значения функции и раньше. Мы смотрели на график функции и делали вывод, где функция достигает наибольшего значения, а где - наименьшего.
Давайте повторим:



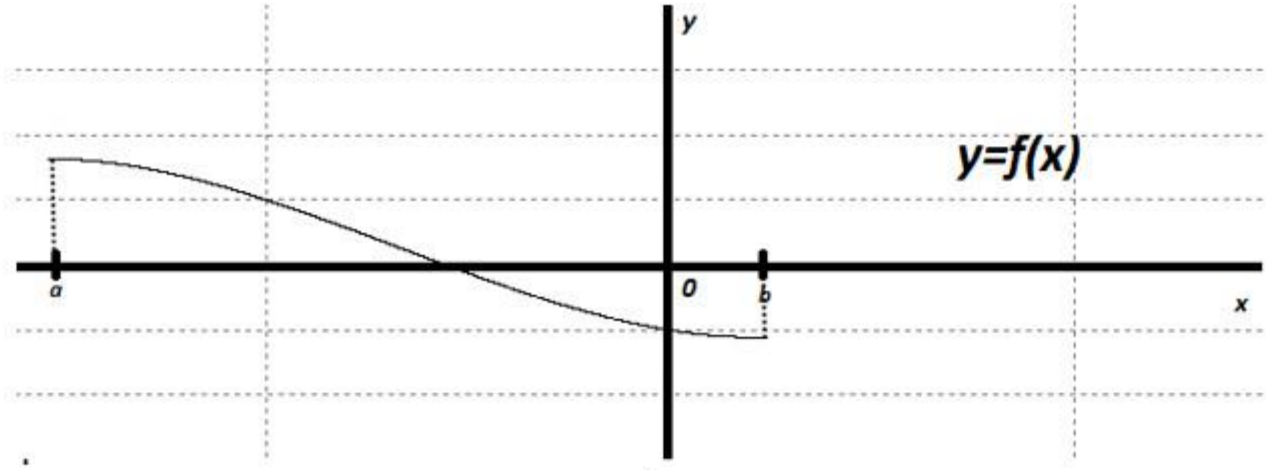
По графику нашей функции видно, что наибольшее значение достигается в точке x= 1, оно равно 2. Наименьшее значение достигается в точке x= -1, и оно равно -2. Данным способом довольно просто находить наибольшие и наименьшие значения, но не всегда существует возможность построить график функции.

Нахождение наибольшего и наименьшего значения с помощью производной

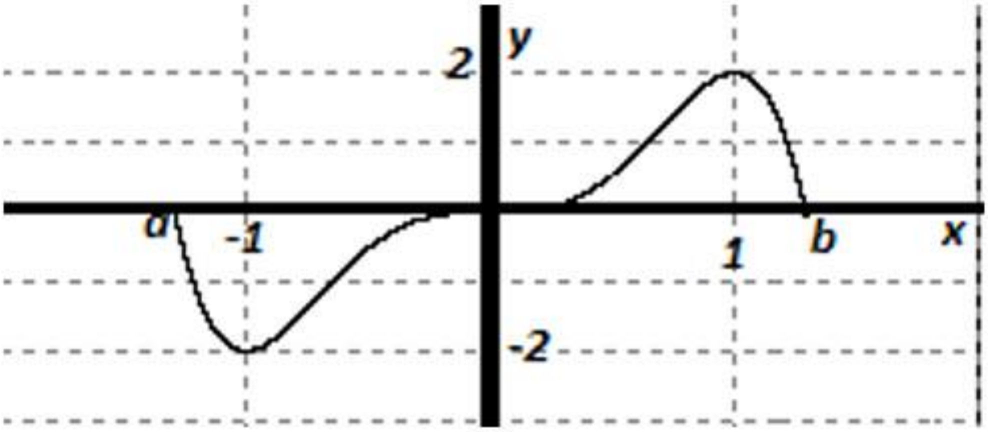
Ребята, а как вы думаете, как с помощью производной можно найти наибольшее и наименьшее значение?

Ответ можно найти в теме экстремумы функции. Там мы с вами находили точки максимума и минимума, не правда ли термины похожи. Однако, путать наибольшее и наименьшее значение с максимум и минимум функции нельзя, это разные понятия.
Итак, давайте введем правила:

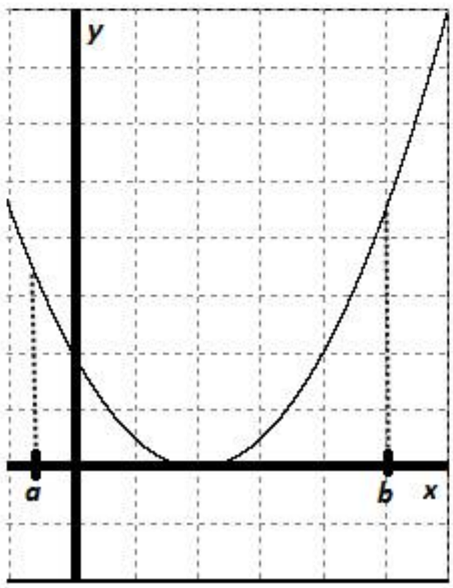
а) Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает своего наибольшего и наименьшего значения на этом отрезке.
б) Наибольшего и наименьшего значения функция может достигать как на концах отрезках, так и внутри него. Давайте рассмотрим этот пункт подробнее.



а)



б)



в)

На рисунке а функция достигает своего наибольшего и наименьшего значения на концах отрезках [a;b].
На рисунке б функция достигает своего наибольшего и наименьшего значения внутри отрезка [a;b].

На рисунке в точка минимума находится внутри отрезка, а точка максимума - на конце отрезка, в точке b.

1. Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на нем своего наибольшего и своего наименьшего значения.
2. Наибольшего и наименьшего значений непрерывная функция может достигать как на концах отрезка, так и внутри него.
3. Если наибольшее (наименьшее) значение функции достигается внутри отрезка, то только в стационарной или критической точке.

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции y = f(x) на отрезке [a; b]:

1. Найти производную f‘ (x) стационарные и критические точки функции, принадлежащие интервалу (a; b).
2. Найти f(a), f(b) и значения функции в стационарных точках, принадлежащих интервалу (a; b) и среди полученных значений выбрать наибольшее и наименьшее

Выводы:
1. Если функция *y = f(x)* на отрезке [*a*; *b*] имеет лишь одну точку и она является точкой максимума (минимума), то в этой точке функция принимает наибольшее (наименьшее) значение.
2. Если функция *y = f(x)* на отрезке [a; b] не имеет критических, то это означает, что на нем функция монотонно возрастает или убывает. Следовательно, свое наибольшее значение функция принимает одном конце отрезка, а наименьшее – на другом.
3. Если на отрезке [a; b] функция имеет несколько критических точек, то своего наибольшего (наименьшего) значения она достигает либо на концах этого отрезка, либо в критических точках, лежащих на данном отрезке.

Примеры и разбор решения заданий

№1.Найти наибольшее и наименьшее значения функции f (x) = $2x^3 – 9x^2 + 12x – 2$ на отрезке [0; 3]

Решение. Действуем в соответствии с алгоритмом.

1) D(f) = (-∞; +∞).

2) $f'(x) = 6x^2 – 18x + 12$

3) Стационарные точки: x = 1; x = 2.

$1 \in (0;\ 3);\ 2\ \in\ (0;\ 3)$

4) f(0) = -2, f(3) = 7, f(1) = 3, f(2) = 2

5) $f_{наим.}$=f(0) = -2

$f_{наиб.}$=f(3) = 7., Ответ: $f_{наим}$= -2, $f_{наиб.}$= 7.

№2.Найдите два положительных числа, сумма которых равна 16, а произведение наибольшее.

Решение.

Пусть первое число равно x, $x > 0$

Тогда второе число - $(16\ -\ x), 16 - x > 0$

Следовательно, $0 < x < 16$

Произведение этих чисел равно x(16 – x).

Составим функцию:

f(x) = x(16 – x)

$f'(x) = -2x + 16$

x = 8 – единственная стационарная точка на интервале (0; 16), она является точкой максимума.

Следовательно, в этой точке функция F(x) = x(16 – x) принимает наибольшее значение.

Следовательно, два положительных числа, сумма которых равна 16, а произведение наибольшее, это 8 и 8. Ответ:8 и 8

№3

Найдите наименьшее значение функции $y = (x\text{-}8)e^{x-7}$ на отрезке [6;8].

1) y´ = e^{x-7}(x - 7), D(y´) = R.

2) y´ = 0 при x = 7.

3) 7 ∈ [6;8].

I способ

y(6) = -(2/*e*)

y(7) = -1 - наименьшее значение функции

y(8) = 0

II способ

Т.к. $y'(6,5) < 0$ и $y'(7,5) > 0$,то $x_{min} = 7$

Т.к. на отрезке [6;8] функция имеет единственную критическую точку, которая является точкой минимума, то значение функции в этой точке – наименьшее; y(7) = -1 – наименьшее значение функции. Ответ: -1.

№4 Дано: $y = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$, $x \in [0; 2]$.

Найти наибольшее и наименьшее значение функции на данном отрезке.

1. Найдем производную $y' = 3x^2 - 18x + 15$.
2. Найдем критические точки $3(x^2 - 6x + 5) = 0$, отсюда $x_1 = 1$, $x_2 = 5$ - критические точки.

   Из них выбираем те, которые принадлежат данному отрезку: $x_1 = 1$.

   Сравним значение функции в точках $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

   Для этого найдем

$y(0) = -3$;- наименьшее значение

$y(1) = 1 - 9 + 15 - 3 = 16 - 12 = 4$; -наибольшее значение

$y(2) = 8 - 36 + 30 - 3 = 38 - 39 = -1$.

Ответ: $y_{наиб} = y(1) = 4$; $y_{наим} = y(0) = -3$.

Самостоятельная работа

№1 Найти наибольшее и наименьшее значения функции:
на отрезке.
У $= 9x + 3x^2 - x^3$ на отрезке [– 2; 2].

№2

.Найдите наибольшее и наименьшее

значения функции $f(x) = 3x^2 + 4x^3 + 1$

на отрезке [0; 2].

№3. Найдите наибольшее и наименьшее

значения функции $f(x) = x^4 - 2x^2$

на отрезке [0; 2].

№4

Найдите наименьшее значение функции $y = (x - 21)e^{x-20}$ на отрезке [19;21].

№5

Прямая $y = -5x + 14$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 3x^2 - 2x + 15$.

Найдите абсциссу точки касания.

Тема: Первообразная функция.

Цели и задачи:

Общеобразовательные:
Ввести понятие первообразной функции. Таблица первообразных, правила нахождения первообразной и применение их в решении задач.

Развивающие: развитие логического мышления, памяти, формирование умений анализа и синтеза полученных знаний, развитие абстрактного мышления, научить выделять главное, развивать математический кругозор. Формирование умения самостоятельной деятельности, развитие навыков реализации теоретических знаний в практической деятельности.

Немного истории.

Математический анализ как раздел математики возник в результате объединения двух различных и первоначально не связанных направлений математических исследований – дифференциального и интегрального исчислений. Первоначально интуитивное представление о математическом объекте, который мы сейчас называем определенным интегралом, встречалось в работах ученых Древней Греции. Так, Архимед для вычисления объемов и площадей поверхности тел пользовался разбиением фигур на элементы с последующим суммированием этих элементов, предвосхищая тем самым понятия интегральных сумм. Аналогичными задачами, развивая метод Архимеда, занимались И.Кеплер, Б.Паскаль, П.Ферма и другие ученые. Ферма также занимался задачами, которые мы сейчас относим к дифференциальному исчислению, - проведением касательных к кривым, нахождением наибольшего и наименьшего значений функций и т.д., причем для решения этих задач он, по существу, пользовался понятием приращения функции. Связь между этими различными классами задач была осознана учеными после исследований И.Ньютона и Г.Лейбница.

Лейбницем и были введены используемые в настоящее время обозначения интеграла и дифференциала.

Если до настоящего времени мы изучали раздел математического анализа, называемого дифференциальным исчислением, суть которого заключается в изучении функции в “малом”.

Т.е. исследование функции в достаточно малых окрестностях каждой точки определения. Одна из операций дифференцирования- нахождение производной (дифференциала) и применении к исследованию функций.

Не менее важной является обратная задача. Если известно поведение функции в окрестностях каждой точки ее определения, то как восстановить функцию в целом, т.е. во всей области ее определения. Эта задача составляет предмет изучения так называемого интегрального исчисления.

Интегрированием называется действие обратное дифференцированию. Или восстановление функции f(x) по данной производной f`(x). Латинское слово “integro” означает – восстановление.

Пример №1*.* Пусть (x)`=$3x^2$. Найдем f(x).

Решение:

Опираясь на правило дифференцирования, нетрудно догадаться, что f(x)=x^3, ибо (x^3)`=$3x^2$
Однако, легко можно заметить, что f(x) находится неоднозначно.
В качестве f(x) можно взять
f(x)= x^3+1
f(x)= x^3+2
f(x)= x^3-3 и др.

Т.к. производная каждой из них равно $3x^2$. (Производная постоянной равна 0). Все эти функции отличаются друг от друга постоянным слагаемым. Поэтому общее решение задачи можно записать в виде f(x)= x^3+C, где C - любое постоянное действительное число.

Любую из найденных функций f(x) называют **ПЕРВООБРАЗНОЙ** для функции F`(x)= $3x^2$

Определение*.* Функция F(x) называется первообразной для функции f(x) на заданном промежутке J, если для всех x из этого промежутка F`(x)= f(x).

Так функция F(x)=x^3 первообразная для f(x)=$3x^2$ на (- ∞ ; ∞).
Так как, для всех x ~R справедливо равенство: F`(x)=($x^3$)`=$3x^2$

Теорема: (Основное свойство первообразной функции)

Если F(x) одна из первообразных для функции f(x) на промежутке J, то множество всех первообразных этой функции имеет вид: F(x)+C, где C - любое действительное число.

Таблица первообразных:

Функция f(x)	Первообразная F(x)
$(кx+b)^n, n \neq -1, k \neq 0$	$\frac{(кx+b)^{n^{n+1}}}{n+1} + C$

$\frac{1}{kx+b}, x > 0$	$x + b) + C$
$\cos(k\,x + b), k \neq 0$	$x + b) + C$
$\sin\,(kx + b), k \neq 0$	$x + b) + C$
$e^{kx+b}\ k \neq 0$	$\frac{1}{к} e^{kx+b} + C$

Правила вычисления первообразных

1. **Первообразная суммы равна сумме первообразных**. Если *F(x)* — первообразная для *f(x)*, а G(x) — первообразная для *g(x)*, то *F(x)* + *G(x)* — первообразная для *f(x)* + *g(x)*.
2. **Постоянный множитель можно выносить за знак производной**. Если *F(x)* — первообразная для *f(x)*, и *k* — постоянная, то *k·F(x)* — первообразная для *k·f(x)*.
3. Если *F(x)* — первообразная для *f(x)*, и *k, b* — постоянные, причём *k ≠ 0*, то *1/k · F(kx + b)* — первообразная для *f(kx + b)*.

Первообразная функции **f(x)** – это такая функция **F(x)**, для которой выполняется условие:

F′(x) = f(x).

Интегрирование функции **f(x)** – это математическая операция, в ходе которой находят первообразную функции **f(x).**

Задание докажите, что

$g(x) = 5x^4 + 18x^2 + \cos x$

является первообразной для функции

$y(x) = 20x^3 + 36x - \sin x$

Решение: $g(x)$ – это первообразная для $y(x)$, если, согласно определению, выполняется условие:

$g'(x) = y(x)$

Проверим, соблюдается ли оно:

$g'(x) = (5x^4 + 18x^2 + \cos x)' = 5 \bullet (x^4)' + 18 \bullet (x^2)' + (\cos x)' =$

$= 5 \bullet 4x^3 + 18 \bullet 2x + (-\sin x) = 20x^3 + 36x - \sin x = y(x)$

Условие выполняется, значит, $g(x)$ – это первообразная $y(x)$.

Пример: Для функции f (x) = 2x найти первообразную, график которой проходит через т.М (1;4)

Решение: $F(x)=x^2+C$ – множество всех первообразных, F(1)=4 - по условию задачи.
Следовательно, $4 = 1^2+C$
C = 3
$\underline{F(x) = x^2+3}$

Приведем несколько примеров первообразных:

1. $F(x) = \sin x$ – это первообразная для $f(x) = \cos x$, так как

$F'(x) = (\sin x)' = \cos x = f(x)$

2. $F(x) = 5x^3$ – это первообразная для $f(x) = 15x^2$, так как

$F'(x) = (5x^3)' = 5 \bullet (x^3)' = 5 \bullet 3x^2 = 15x^2 = f(x)$

3. $F(x) = e^x$ – это первообразная для $f(x) = e^x$, так как

$F'(x) = (e^x)' = e^x = f(x)$

Примеры и разбор решения:

№1. Для функции y = f(x) найдите множество всех первообразных. Выполните проверку. $f(x) = 2\sin x + 3x^3$

Решение:

$f(x) = 2\sin x + 3x^3$, $\quad F(x) = -2\cos x + \frac{3}{4}x^4 + C$

Проверка: Найдем производную функции F(x).

$$F'(x) = (-2\cos x + \frac{3}{4}x^4 + C)' = 2\sin x + \frac{3}{4}\cdot 4x^3 = 2\sin x + 3x^3$$

F'(x) = f(x) Ответ: $F(x) = -2\cos x + \frac{3}{4}x^4 + C$

№2. Значение первообразной функции F(x) функции f(x) = 10cosx в точке $x = \frac{\pi}{2}$ равно -4. Найдите $F(-\frac{\pi}{6})$.

Решение. Сначала найдем первообразную

F(x) = 10sinx+ C

Затем подставляя значения точки x, найдем число c

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 10\ sin\, sin\ \frac{\pi}{2} + C$$

$10\ sin\, sin\ \frac{\pi}{2} + C\ = -4$ C = -14

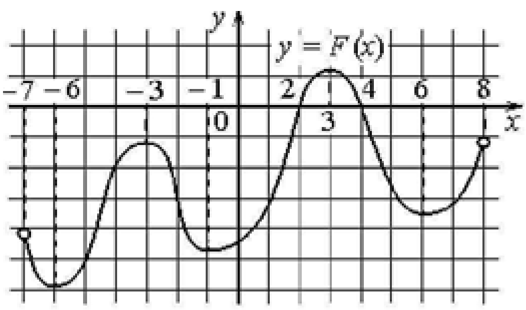
Далее получаем уравнение первообразной в этой точке

F(x) = 10sin x – 14

И находим значение первообразной в другой точке

$F\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 10\ sin\, sin\ (-\frac{\pi}{6}) - 14$ $F\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -19$ Ответ: -19

№3. По графику первообразной функции y = F(x) определите числовые промежутки, на которых функция y = f(x) имеет отрицательный знак.



Решение:

Так как F'(x) = f(x)- по определению первообразной, то числовые промежутки, на которых функция f(x) (производная функции F(x)) имеет отрицательный знак – это промежутки убывания функции F(x). Таких промежутков на данном графике 3. Это (-7; -6); (-3; -1); (3;6)
Ответ: (-7; -6); (-3; -1); (3;6)

№4. Значение первообразной функции F(x) функции $f(x) = 5x^3 – 3x^2 + 7x – 2$ в точке x = 0 равно 5. Найдите F(2).

Решение. 1. Найдем множество всех первообразных для данной функции.

$$F(x) = \frac{5}{4}x^4 - x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 2x + C$$

2.Так как в точке x = 0 значение первообразной функции равно 5, то нам необходимо найти такое значение C, для которого выполняется условие F(0) = 5.

Решим уравнение:

$$5 = \frac{5}{4}\cdot 0^4 - 0^3 + \frac{7}{2}\cdot 0^2 - 2\cdot 0 + C$$

1. Из полученного уравнения находим C = 5.

Следовательно, первообразная для функции $f(x) = 5x^3 – 3x^2 + 7x – 2$ при заданном условии F(0) = 5 имеет вид: $F(x) = \frac{5}{4}x^4 - x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 2x + 5$

1. Тогда $F(2) = \frac{5}{4}\cdot 2^4 - 2^3 + \frac{7}{2}\cdot 2^2 - 2\cdot 2 + 5$ F(2) = 27 Ответ: 27

Задание. Найдите все первообразные *F(x)* для функции 1-3.

В четвертом задании найдите для заданной функции *f(x)* ту первообразную, график которой проходит через точку *M*.

1. $f(x)=1+2x^4-\frac{1}{x^3}$ *на* $(0;+\infty)$

2. $f(x)=\cos 3x+1$ *на* $(-\infty;+\infty)$

3. $f(x)=(1-4x)^5$ *на* $(-\infty;+\infty)$

4. $f(x)=\frac{3}{\sin^2 2x}$, $M\left(\frac{\pi}{8};2\right)$

Тема: Площадь криволинейной трапеции. Интеграл и его свойства.

Цели и задачи:

1) Нахождение определенного интеграла

2) Нахождение площади криволинейной трапеции с помощью формулы Ньютона – Лейбница

3) Решение задач, с помощью формулы Ньютона – Лейбница.

Оборудование учебного кабинета:

- рабочее место преподавателя;
- посадочные места по количеству обучающихся;
- учебно-методический комплекс по дисциплинам «Алгебра» и «Геометрия»;
- наглядные пособия: таблицы, карточки с заданиями

Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная графиком неотрицательной и непрерывной на отрезке [a;b] функции *f*, осью Ox и прямыми *x* = *a* и *x* = *b*.

Если в задаче требуется вычислить площадь криволинейной трапеции, то ответ всегда будет положительный.

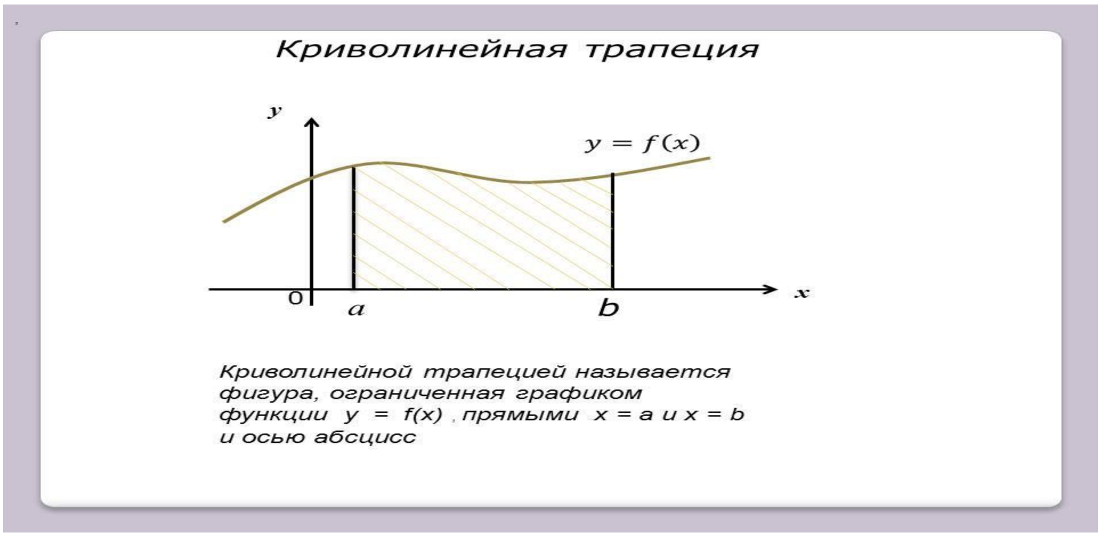
Если требуется, используя чертеж, вычислить интеграл, то его значение может быть любым(зависит от расположения криволинейной трапеции).

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Формула Ньютона – Лейбница

Как вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком непрерывной и неотрицательной на отрезке $[a;b]$ функции $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$. Такую фигуру называют **криволинейной трапецией**.
Итак, **площадь криволинейной трапеции** можно вычислить по формуле $S = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ – любая первообразная функции $f(x)$.



Разность $F(b) - F(a)$ называют **интегралом функции** $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и обозначают $\int_a^b f(x)dx$.
То есть $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$**.** Эту формулу называют **формулой Ньютона-Лейбница**. На практике формулу записывают следующим образом:
$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b$.

Запись вида $\int_a^b f(x)dx$ называют **определённым интегралом**. Числа a и b называют соответственно **нижним** и **верхним пределами интегрирования**,
функцию $f(x)$ – **подынтегральной функцией**, переменную x – **переменной интегрирования**.

Напомним два **свойства определённого интеграла**.

1. $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$;

2. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$.

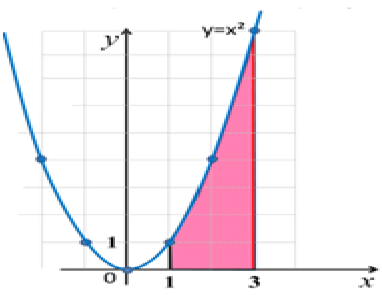
Геометрический смысл определённого интеграла заключается в том, что площадь криволинейной трапеции вычисляется по формуле $S = \int_a^b f(x)dx$.
Физический смысл определённого интеграла. При прямолинейном движении перемещение s за промежуток времени от t_1 до t_2 вычисляется по формуле $s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$,
где $v(t)$ – скорость движения.
Ещё одно физическое истолкование определённого интеграла. Масса m прямолинейного неоднородного стержня с плотностью $\rho(x)$ вычисляется по формуле $m = \int_a^b \rho(x)dx$, где a – координата начала стержня, b – координата конца стержня.

Мы с вами повторили основные моменты, а теперь давайте перейдём к практической части занятия.

Итог схема нахождения площади криволинейной трапеции:

1. Построить графики функций
2. Спроецировать точки пересечения графиков на ось абсцисс
3. Заштриховать фигуру, полученную при пересечении графиков
4. Найти криволинейные трапеции, пересечение или объединение которых есть данная фигура.
5. Вычислить площадь каждой из них
6. Найти разность или сумму площадей

Примеры и разбор решения заданий . №1.Найти площадь криволинейной трапеции, изображенной на рисунке



Решение ; Для вычисления площади криволинейной трапеции воспользуемся формулой Ньютона – Лейбница.

$$S=\int_a^b f(x)dx$$

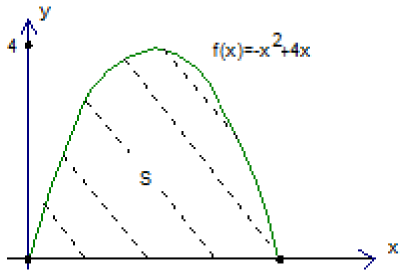
$$S=\int_1^3 x^2dx = F(3)-F(1)=$$

$$=\frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3}=8\frac{2}{3}(кв.ед)$$

Ответ: $8\frac{2}{3}$

2.Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=-x^2+4x, y=0.$

Решение.; Схематически изобразим параболу $y=-x^2+4x.$ корни этого уравнения: x=0,x=4.ветви направлены вниз.



Парабола $y=-x^2+4x$. Применим известную формулу $S=\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b)-F(a)$

И применим ее для данной функции $y=-x^2+4x$ и пределов интегрирования $a=0, b=4.$

$$S=\int_0^4(-x^2+4x)dx=(-\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{2}x^2)|_0^4=(-\frac{1}{3}x^3+2x^2)|_0^4=(-\frac{4^3}{3}+2*4^3)-0$$

$$=\frac{-64+96}{3}=\frac{32}{3}.$$

Искомая площадь найдена. $S=\frac{32}{3}.$ *Ответ:* $\frac{32}{3}$

№2. Вычислить определенный интеграл: Решение: Воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница. $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$

Сначала находим первообразную функцию F(x) . Далее подставляем значение верхнего предела в первообразную функцию: F(b) .

Затем подставляем значение нижнего предела в первообразную функцию: F(a).

Рассчитываем разность F(b) - F(a), это и будет ответ.

$$1)\int_0^1 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$2)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin xdx = -\cos x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

$$3)\int_{-2}^{3} \frac{2}{(x+3)^2}dx = -2(x+3)^{-1}\Big|_{-2}^{3} = -\frac{1}{3} + 2 = 1\frac{2}{3}$$

№3. Найти площадь криволинейной трапеции $(x\text{-}1)^2$, ограниченной линиями x=2 и x=1, осью 0х. Решение:

Воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Сначала находим первообразную функцию F(x). Далее подставляем значение верхнего предела в первообразную функцию: F(b) .

Затем подставляем значение нижнего предела в первообразную функцию: F(a).

Рассчитываем разность F(b) - F(a), это и будет ответ.

$$S = \int_1^2 (x-1)^2 dx = \frac{(2-1)^3}{3} - \frac{(1-1)^3}{3} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

Самостоятельная работа

1.Для функции f(x) найдите ту первообразную, график которой проходит через точку А: $f(x) = 3x^2 - 4x + 2; A(-1{:}0)$

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями :*$y = -(x^2 - 5x + 4)$, $y = 0$.*

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2\text{-}6x+8$; x=1, y=0.

4 Вычислите площадь трапеции, ограниченной линиями: $y=4x\text{-}x^2$**;** y=0**;** x=0**;** x=4**.**

Тема: «Математические навыки в медицине»

Для специальностей: «Сестринское дело»

<u>1. Пояснительная записка</u>

Учебное методическое пособие составлено в соответствии с Федеральным Государственным образовательным стандартом среднего профессионального образования по специальностям: 34.02.01 «Сестринское дело».

Учебное пособие написано в помощь студентам при изучении темы: «Математические навыки в медицине»

Содержание учебного пособия соответствует рабочей программам по математике по специальностям Лечебное дело», «Сестринское дело». На изучение темы отведено **14 обязательных аудиторных часов для специальностей «Сестринское дело» и 16 аудиторных часов по специальности «Лечебное дело».**

Пособие содержит краткую теоретическую часть, примеры решения типовых задач, упражнения для самостоятельного решения, вопросы для контроля. Изложение теоретического материала сопровождается большим количеством примеров и задач. Учитывая профессиональную направленность курса математики, приведены примеры и предложены задачи по дисциплинам фармакологии, педиатрии, сестринский уход в терапии. Это способствует воспитанию у студентов уверенности в профессиональной значимости изучаемого предмета. Выполняя самостоятельно практические задания, студенты убеждаются в справедливости теоретических основ математики, а также видят практическое применение математических методов в медицине. Учебное пособие дает возможность студентам самостоятельно изучить теоретический материал, способствует выработке у студентов умений и навыков анализировать усвоенный теоретический материал, а также способствует формированию умений и навыков практического применения полученных теоретических знаний по предмету при решении прикладных задач в области медицины.

Пособие предназначено для студентов медицинских колледжей. Рекомендуется применять на теоретических и практических занятиях по

дисциплине «Математика».

По итогам изучения темы студент должен

знать:

- Определение процента;
- Определение процентной концентрации растворов;
- Понятие пропорции, основное свойство пропорции;
- Меры объема – дозы лекарственных форм;
- Единицы веса;
- Формулы расчета максимального и минимального артериального давления детей, прибавки массы и роста, суточной калорийности пищевого рациона детей, формулу нормы количества мочи, выделяемой за сутки;

уметь:

- Решать задачи на проценты;
- Рассчитывать процентную концентрацию растворов;
- Получать нужную концентрацию растворов;
- Рассчитывать цену деления шприца (обычного и инсулинового);
- Определять шоковый индекс, кровопотерю;
- Уметь рассчитывать максимальное и минимальное артериальное давление у детей, прибавку роста и массы детей;
- Рассчитывать суточную калорийность пищевого рациона детей;
- Определять количество мочи, выделяемой за сутки у детей по формуле;

- Уметь составлять и решать пропорции;
- Рассчитывать количество лекарственного вещества в 1 мл. раствора;
- Рассчитывать разовую, суточную и курсовую дозу лекарственных веществ, выписанных в рецепте.

2. Области применения математических методов в медицине и биологии

Различные конкретные математические методы применяются к таким областям биологии и медицины, как таксономия, экология, теория эпидемий, генетика, медицинская диагностика и организация медицинской службы. В том числе математические методы классификации применяются к задачам биологической систематики и медицинской диагностики, а также используются для исследования операций в организационных вопросах, связанных с медицинским обслуживанием.

Существенно, важен вопрос в том, в каких областях применимы математические методы. Потребность в математическом описании появляется при любой попытке вести обсуждение в точных понятиях и что это касается даже таких сложных областей как искусство и этика. Рассмотрим несколько конкретнее области применения математики в биологии и медицине.

До сих пор мы имели в виду главным образом те медицинские исследования, которые требуют более высокого уровня абстракции, чем физика и химия, но тесно связана с ними. Далее мы перейдем к проблемам, связанным с психологией человека, т.е. к использованию прикладных наук для достижения некоторых более общих целей. Эту область довольно расплывчато называют *исследованием операций.* Пока лишь отметим, пойдет о применении научных методов при решении административных и организационных задач, особенно тех, которые непосредственно или косвенно связаны **с медициной.**

В медицине часто возникают сложные проблемы, связанные с применением лекарственных препаратов, которые еще находятся на стадии испытания. Морально врач обязан предложить своему больному наилучший из существующих препаратов, но фактически он не может сделать выбор, пока испытание не будет закончено. В этих случаях применение правильно спланированных последовательностей статистических испытаний позволяет сократить время, требуемое для получения окончательных результатов.

Этические проблемы при этом не снимаются, однако такой математический подход несколько облегчает их решение.

Простейшее исследование повторяющихся эпидемий вероятностными методами показывает, что такого рода математическое описание позволяет в общих чертах объяснить важное свойство таких эпидемий – периодическое возникновение вспышек примерно одинаковой интенсивности, тогда как детерминистская модель дает ряд затухающих колебаний, что не согласуется с наблюдаемыми явлениями. При желании разработать более детальные, реалистические модели мутаций у бактерий или повторяющихся эпидемий эта информация, полученная с помощью предварительных упрощенных моделей, будет иметь очень большую ценность. В конечном счете, успех всего направления научных исследований определяется возможностями моделей, построенных для объяснения и предсказания реальных наблюдений.

Одно из больших преимуществ, правильно построенной математической модели состоит в том, что она дает довольно точное описание структуры исследуемого процесса. С одной стороны это позволяет осуществить ее практическую проверку с помощью соответствующих физических, химических или биологических экспериментов, с другой стороны. С другой стороны, математический анализ образом, с самого начала предусматривает соответствующую статистическую обработку данных.

Разумеется, множество глубоких медицинских и биологических исследований было бы успешно выполнено без особого внимания к статистическим тонкостям. Но во многих случаях планирование эксперимента, предусматривающее достаточное использование статистики, значительно повышает эффективность работы и обеспечивает получение большого объема информации о большем числе факторов при меньшем числе наблюдений. В противном случае эксперимент может оказаться неэффективным и неэкономичным и даже привести к неверным выводам. В этих случаях новые гипотезы, построенные на таких необоснованных выводах, не смогут выдержать проверку временем.

Отсутствием статистического подхода в медицине можно в какой-то мере объяснить периодическое появление «модных» препаратов или методов лечения. Очень часто врачи выбирают те или иные новые препараты или методы лечения и начинают их широко применять только на основании кажущихся благоприятных результатов, полученных на небольших выборках данных и обусловленных чисто случайными колебаниями. По мере того как у медицинского персонала накапливается опыт применения этих препаратов или методов в больших масштабах, выясняется, что возлагающиеся на них надежды не оправдываются. Однако для такой проверки требуется очень много времени, и она весьма ненадежна и неэкономична; в большинстве случаев этого можно избежать путем правильно спланированных испытаний на начальном этапе. В связи с этим, в настоящее время специалисты в области биоматематики настоятельно рекомендуют применять различные методы математической статистики при проверке гипотез, оценке параметров, планировании экспериментов и обследований, принятии решений или изучении работы сложных систем.

<u>3. Понятие пропорций. Основное свойство пропорции.</u>

1.1 **Отношением** числа ***a*** к числу ***b*** называется **частное от деления** числа ***a*** на число ***b.*** Записывают $\frac{a}{b}$ или a : b. Например, отношение 2 к 5 равно $\frac{2}{5}$.

Отношение $\frac{a}{b}$ показывает во сколько раз число ***a*** больше числа ***b,*** если ***a b*** или какую часть числа ***b*** составляет число ***a,*** если ***ab.***

*1.**2 Пропорцией** называется равенство двух отношений:*

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ или } a : b= c : d.$$

a, d – называют крайними членами пропорции

b, c – называют средними членами пропорции.

Основное свойство пропорции: *произведение крайних членов пропорции равно произведению ее средних членов, т.е.*

$$a \cdot d = b \cdot c$$

Это свойство пропорции позволяет найти неизвестное число пропорции, если три других числа пропорции известны.

Например: $\frac{x}{3} = \frac{8}{12}$, $x=\frac{8\cdot 3}{12}=2$

<u>4. Процент. Основные виды задач на проценты.</u>

Слово «процент» происходит от латинского pro centum, что буквально означает «на сотню», «со ста» или «за сотню». В популярной литературе возникновение этого термина связывается с введением в Европе десятичной системы счисления в XV в. Но идея выражения частей целого постоянно в одних и тех же величинах, вызванная практическими соображениями, родилась еще в древности в Вавилоне. Ряд задач клинописных табличек посвящен исчислению процентов, однако вавилонские ростовщики считали не «со ста», а «с шестидесяти». Проценты были особенно распространены в Древнем Риме.

Римляне называли процентами деньги, которые платил должник своему заимодавцу за каждую сотню. Вероятно, процент возник в Европе вместе с ростовщичеством. Есть мнение, что понятие процент ввел бельгийский ученый Симон Стевин. В 1584 г. он *опубликовал таблицы процентов. Употребление термина «процент» в России начинается в конце XVIII в. Долгое время под процентами понималось исключительно прибыль или убыток на каждые 100 рублей. Они применялись только в торговых и денежных сделках. Затем область их применения расширилась, проценты встречаются в хозяйственных и финансовых расчетах, статистике, науке и технике. Интересно происхождение обозначения процента. Существует версия, что знак % происходит от итальянского pro cento (сто), которое в процентных расчетах часто сокращенно писалось cto. Отсюда путем дальнейшего сокращения буква t превратилась в наклонную черту (/), возник современный знак процента.*

Также есть предположение, что знак % возник в результате опечатки. В Париже в 1685 г. была напечатана книга – руководство по коммерческой арифметике, где по ошибке наборщик напечатал вместо cto знак %. Сейчас проценты употребляются для сравнения однородных положительных количеств. ***Один процент – это по определению одна сотая:***

1%= $\frac{1}{100}$ *. Соответственно, p%=* $\frac{p}{100}$ *. Один процент от количества А – это, по определению, одна сотая часть количества А: 1% от А равен* $\frac{1}{100}$ *А .*

Соответственно, p% от А равен $\frac{p}{100}A$ *. Например, чтобы найти 6% от числа 150, нужно 6/100* $\cdot 150$ *= 9.*

Задачи на проценты можно решать различными способами: составляя пропорцию, по действиям, обозначив неизвестное за x*, составляя и решая уравнение, используя логические рассуждения.*

Пример решения задачи с помощью пропорции: *Из партии в 1000 ампул с новокаином, 20 ампул оказались бракованными. Определить процент неиспорченных ампул.*

<u>Решение:</u>

Составим пропорцию:

1000 амп. – 100%

980 амп. – х %

$$x=\frac{980\cdot 100}{1000}=98$$

Ответ: процент неиспорченных ампул равен 98%.

Рассмотрим три основных вида задач на проценты и способы их решения по действиям.

1. ***Найти число по указанному проценту.***

<u>Данное число делится на 100, и полученный результат умножается на число процентов.</u>

Пример. *В отделении за сутки в среднем расходуется 0,5 кг хлорной извести. Во время генеральной уборки помещений израсходовано 150% среднесуточного количества хлорной извести. Сколько хлорной извести израсходовал персонал отделения во время генеральной уборки помещения?*

<u>Решение:</u>

1. *0,5 кг : 100% = 0,005 кг в 1%.*
2. *0,005* $\cdot 150 = 0{,}75$ *кг.*

Ответ: израсходовано 0,75 кг хлорной извести.

1. ***Найти число по данной величине указанного его процента.***

<u>Данная величина делится на число процентов, и результат умножается на 100.</u>

Пример. *Вес хлорной извести в растворе составляет 10%. Сколько потребуется воды для разведения раствора, если известно, что хлорной извести взяли 0,5 кг?*

<u>Решение:</u>

1. *0,5 кг : 10 = 0,05 кг в 1%.*
2. *0,05* $\cdot 100 = 5\,л$.

Ответ: потребуется 5 л. воды.

1. ***Найти выражение одного числа в процентах другого.***

<u>Умножаем первое число на 100 и результат делим на второе число.</u>

Пример. *За сутки в отделении израсходовано 765 г хлорной извести вместо среднесуточной нормы расхода 500 г. На сколько процентов больше израсходовано хлорной извести?*

<u>Решение:</u>

1. *765 - 500 = 265 г.*
2. *265* $\cdot 100 = 26500$.
3. *26500 : 500 = 53%*

Ответ: на 53% больше израсходовано хлорной извести за сутки.

<u>5. Меры объема.</u>

1 литр (л) = 1000 миллилитров (мл)

1 мл = 0,001 л

1 грамм (г) = 1000 миллиграммов (мг)

1 мг = 0,001 г.

Пример. *<u>Определить сколько мг содержится в 4,5 г ?</u>*

<u>Решение:</u> Т.к. 1 г это 1000 мг, значит 4,5 г = 4,5 $\cdot 1000\,мг$ *=4500 мг.*

Пример. *<u>Определить сколько граммов содержится в 250 миллиграммах ?</u>*

<u>Решение:</u> Т.к. 1 г = 1000 мг, значит 250 мг = 250 : $1000\,мг$ *= 0,25 г.*

<u>Количество мл в ложке.</u>

1 ст л. – 15 мл

1 дес.л. – 10 мл

1 ч.л. – 5 мл

<u>Капли.</u>

1 мл водного раствора – 20 капель

1 мл спиртового раствора – 40 капель

1 мл спиртово-эфирного раствора – 60 капель

6. Концентрация растворов.

6.1 Концентрацией *называется величина, показывающая сколько растворенного вещества (в граммах, молях, моль - эквивалентах) содержится в определенном количестве раствора (в литре, миллилитре, граммах) или растворено в определенном количестве растворителя (грамме, килограмме).*

Существуют различные способы численного выражения состава растворов: молярная, моляльная, нормальная, процентная концентрации, титр и др.

Способы выражения содержания растворенного вещества в растворе.

Процентная концентрация.

Массовая доля (в процентах) или процентная концентрация

(ω) – показывает число грамм растворенного вещества, содержащееся в 100 граммах раствора.

Процентная концентрация есть отношение массы растворенного вещества к общей массе раствора, выраженная в процентах.

$$\omega\% = \frac{m \text{ раств. в-ва} \cdot 100\%}{m \text{ р-ра}}$$

где ω – процентная концентрация (%),

m раств. в-ва – масса растворенного вещества (г),

m р-ра – масса раствора (г).

Массовая доля измеряется в долях единицы и используется в промежуточных расчетах. Если массовую долю умножить на 100 % получится процентная концентрация, которая используется, когда выдается конечный результат.

Масса раствора складывается из массы растворенного вещества и массы растворителя:

m р-ра = mр-ля + mраств. в-ва (2),

где m р-ра – масса раствора (г),

m р-ля – масса растворителя (г),

m раств. в-ва – масса растворенного вещества (г).

Например, если массовая доля растворенного вещества – серной кислоты в воде равна 0,05 г, то процентная концентрация составляет 5%. Это означает, что в растворе серной кислоты массой 100 г содержится серная кислота массой 5 г, а масса растворителя составляет 95г.

Плотность раствора *– это величина, показывающая массу единицы объема.*

Плотность воды равна 1. *Следовательно, 100 г воды = 100 мл воды.*

Примеры:

1. *Что означает 9% раствор поваренной соли?*

<u>Ответ:</u> Это значит, что в 100 г этого раствора содержится 9 г. соли и 91 г (мл) воды.

1. *Что означает 2% раствор хлорной извести? (в 100 г раствора содержится 2 г извести и 98 г. воды).*
2. *Найти %-ую концентрацию раствора соли (ω ¿ , если 50 г соли развели в 200 г. воды.*

<u>Решение:</u> *m_1 = 50 г (масса соли), m_2 = 200 г (масса воды)*

1. *Масса (раствора) m = 200 г + 50 г = 250 г.*
2. ***ω% =*** $\frac{50 \cdot 100}{250} = 20$

1. *В 1 литре водного раствора содержится 30 г сухого вещества. Какова %-я концентрация данного раствора?*

Решение: ω% = $\frac{30 \cdot 100}{1000} = 3$ ***(1 л = 1000 мл = 1000 г)***

<u>6.2 Стандартное разведение антибиотиков.</u>

Если растворитель в упаковке не предусмотрен, то при разведении антибиотика на 0,1 г (100 000 ЕД) порошка берут 0,5 мл растворителя. Таким образом, для разведения:

- 0,2 г нужен 1 мл растворителя;

- 0,5 г нужно 2,5 мл растворителя;

- 1 г нужно 5 мл растворителя.

<u>6.3 Определение цены деления шприца.</u>

Чтобы набрать в шприц нужную дозу лекарственного препарата, надо знать цену деления шприца, т. е. какое количество раствора может находиться между двумя ближайшими делениями цилиндра. Деления и цифры на шприце указывают его вместительность в миллилитрах и долях миллилитра. Для того чтобы определить цену деления, следует найти на цилиндре шприца ближайшую к подыгольному конусу цифру (количество миллилитров) и разделить на число делений на цилиндре (между этой цифрой и подыгольным конусом). Это и будет цена деления шприца.

Например, на рисунке (1), между цифрой 2 и подыгольным конусом четыре деления. ***2:4=0,5.***

Цена деления шприца составляет 0,5 мл.

Рис. 1

$$\frac{\text{вместимость шприца}}{\text{количество делений}} = \text{количество мл между двумя близлежащими делениями цилиндра}$$

<u>6.4 Набор в шприц заданной дозы инсулина</u>

Наиболее часто доза лекарственных средств для парентерального введения выражается в миллилитрах и долях миллилитра. Встречаются и другие условные обозначения дозы. Например, больным, страдающим сахарным диабетом, вводят инсулин, назначаемый в единицах действия (ЕД). Поэтому для введения инсулина выпускаются специальные шприцы, на цилиндре которых указаны не доли миллилитра, а единицы действия. Инсулиновые шприцы объемом 1 мл чаще всего имеют шкалу трёх типов:

- Разделенную на 40 частей (так называемых юнитов).

- Разделенную на 100 частей (тоже юнитов, но других).

- Проградуированную в долях миллилитра.
Кроме того, встречаются шприцы, на которых помещены сразу две шкалы.

Встречаются и другие типы шприцев, поэтому лучше усвоить общий принцип вычисления цены деления любого шприца.
Итак, как же вычислить цену деления шкалы шприца.

1.Устанавливаем полный объём шприца. Как уже говорилось, он написан на обратной стороне упаковки.

2.Теперь устанавливаем объем одного большого деления. Того, которое отмечено большой чертой и рядом с которым написана цифра. Для этого общий объём шприца делим на количество делений. Считать нужно не цифры, а промежутки между ними. В случае со шприцем на 40 юнитов имеем 1/4 = 0,25 мл, в случае со шприцем на 100 юнитов – 1/10 = 0,1 мл. В случае со шкалой в миллилитрах ничего делить не надо, цифра рядом с большим делением и означает объём в миллилитрах.

3. Вычисляем объём маленького деления. Для этого считаем, сколько делений помещается между двумя большими. Считаем опять же не черточки, а не промежутки между ними. Теперь объём большого деления из пункта 2 делим на число маленьких делений, которое

только что посчитали.
После всего этого имеем цену деления большого и маленького деления в миллилитрах (мл). Теперь можно набирать в шприц нужное количество лекарства.
Пример. *Больному необходимо ввести 48 единиц инсулина. Цена деления шприца 0,1 мл. (рис.3) Сколько мл инсулина необходимо взять?*

Решение: *В 1 мл инсулина содержится 40 ЕД инсулина. В 0,1 мл инсулина содержится 4 ЕД инсулина. Чтобы ввести больному 48 единиц инсулина необходимо взять 1,2 мл инсулина:*

48:4 0,1=1,2 мл. ***Ответ:*** *Чтобы ввести больному 48 единиц инсулина необходимо взять 1,2 мл инсулина.*

7. Математические вычисления при различных расчетах в предметах «Акушерство», «Педиатрия».

7.1 Расчет допустимой кровопотери при родах.

В норме физиологическая потеря крови в родах составляет 0,5% от массы тела. Определить кровопотерю в мл. можно по формуле: m – масса тела в кг.

Задача №1: Определить кровопотерю в мл. при родах, если масса женщины 69 кг?

Решение: *воспользуемся формулой (1)*

Ответ: *Кровопотеря составила 0,345 мл.*

Задача №2: Определить кровопотерю в родах, если она составила 10% объема циркулирующей крови (ОЦК) в мл., при этом ОЦК составляет 5000 мл.

Решение: *для определения кровопотери в родах необходимо найти, сколько составляет 10% от 5000.* ***Ответ:*** *Кровопотеря составила 500 мл.*

7.2 Определение шокового индекса.

Шоковый индекс *(ШИ) определяется как отношение частоты сердечных сокращений за 1 мин к величине систолического давления. Нормальная величина шокового индекса определяется:*

60 /120 = 0,5

60- норма ЧСС; 120 – нормальная величина систолического АД в мм рт.ст.

Задача №3: Определить шоковый индекс, если ЧСС – 120, систолическое давление – 80 мм рт.ст.

Решение: *для определения шокового индекса необходимо значение ЧСС разделить на величину систолического давления:*

120 /80 = 1,5 ***Ответ****: шоковый индекс равен 1,5.*

7.3 Расчет прибавки роста детей.

Прирост *за каждый месяц первого года жизни ребенка составляет:*

в I четверть (1-3 мес.) по 3 см за каждый месяц, *во II четверть (3-6 мес.) по 2,5 см за каждый месяц,*

в III четверть (6-9 мес.) по 1,5 см за каждый месяц,

в IV четверть (9-12 мес.) по 1 см за каждый месяц.

Рост ребенка после года жизни можно вычислить по формуле:

<u>X = 75 + 6·n</u>, *где 75 – средний рост ребенка в 1 год,*

6 – среднегодовая прибавка, n – возраст ребенка.

Задача № 4: Ребенок родился ростом 51 см. Какой рост должен быть у него в 5 месяцев (5 лет)?

Решение: *рост ребенка в 5 месяцев: 51 см + 3·3 + 2·2,5 = 65 см.*

рост ребенка в 5 лет: 75 + 6·5 = 105 см.

<u>7.4 Расчет прибавки массы тела детей.</u>

Увеличение *массы тела ребенка за каждый месяц первого года жизни в граммах составляет:*

Месяц	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Прибавка	**600**	**800**	**800**	**750**	**700**	**650**
Месяц	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Прибавка	**600**	**550**	**500**	**450**	**400**	**350**

Массу тела ребенка до 10 лет в кг можно вычислить по формуле:

m = 10 + 2 · n, *где 10 – средний вес ребенка в 1 год, 2 – ежегодная прибавка веса, n – возраст ребенка.*

Массу тела ребенка после 10 лет в кг можно вычислить по формуле:

m = 30 + 4·(n-10), *где 30 – средний вес ребенка в 10 лет, 4 – ежегодная прибавка веса, n – возраст ребенка.*

Задача №5: Ребенок родился весом 3900 г. Какой вес должен быть у него в 6 месяцев, 6 лет, 12 лет?

Решение:

Вес ребенка в 6 месяцев: 3900 г + 600 г + 2·800г + 750г + 700г + 650г = 8200 г.

Вес ребенка в 6 лет: m = 10 + 2·6 = 22 кг.

Вес ребенка в 6 лет: m = 30 + 4·(12 – 10) = 38 кг.

<u>7.5 Расчет нормы максимального и минимального давления у детей.</u>

*Ориентировочно артериальное **<u>максимальное давление</u>** у детей после года жизни определяется с помощью **формулы В.И.Молчанова:***

X = 80 + 2 · n, *где 80 – среднее давление ребенка в 1 год (в мм.рт.ст.),*

n – возраст ребенка.

Минимальное давление составляет 1/2 - 2/3 максимального.

Задача №6: Какое артериальное давление должно быть у ребенка в 7 лет?

Решение:

Максимальное *давление у ребенка 7 лет: X = 80 + 2 · 7 = 94 мм.рт.ст.*

Минимальное *давление: 47 – 63 мм.рт.ст.*

<u>7.6 Расчет суточной калорийности пищевого рациона ребенка.</u>

Суточная калорийность *рассчитывается по формуле:*

1000 + (100 · n), *где n – возраст ребенка, 1000 – суточная калорийность пищевого рациона для годовалого ребенка.*

Задача №7: Рассчитать суточную калорийность пищевого рациона для ребенка 12 лет.

Решение: 1000 + (100 · 12) = 2200 ккал.

<u>7.7 Расчет суточной нормы количества мочи, выделяемой ребенком.</u>

Для определения количества мочи, выделяемой за сутки ребенком, можно воспользоваться формулой:

600 + 100 · (n – 1), *600 – количество мочи в мл, выделяемой ребенком 1 года за сутки, 100 – ежегодная прибавка, n – возраст ребенка.*

Задача №8: Определить количество мочи, выделяемой за сутки ребенком 6 лет.

Решение: 600 +100 · (6 - 1) = 1100 мл.

<u>8. Математические вычисления при различных расчетах в предметах «Сестринский уход в терапии», «Фармакология»</u>.

<u>Примеры решения задач</u>

Задача № 1

По назначению врача больной должен принимать микстуру от кашля по 1 десертной ложке 4 раза в день в течение 8 дней. Сколько необходимо лекарственного вещества в мл на весь курс лечения?

РЕШЕНИЕ: 1 дес. л. = 10 мл – разовая доза. Следовательно, дневная доза: 4x10 мл = 40 мл.

8x40 мл = 320 мл. ***Ответ:*** *больному необходимо 320 мл лекарства на весь курс лечения.*

Задача № 2 *По назначению врача пациенту прописан лекарственный препарат в таблетках по 500 мг 2 раза в день в течение 14 дней. В аптеке пациент купил данный лекарственный препарат в таблетках по 250 мг. Сколько таблеток в день по 250 мг должен принимать пациент не нарушая указания врача? Сколько таблеток по 250 мг необходимо пациенту на весь курс лечения?*

РЕШЕНИЕ:

500 мг = 1000 мг – дневная доза. 1000 мг/250мг=4 таб. в день.

4 таб = 56 таб ***Ответ:*** *больному необходимо принимать по 4 таб в день по 250 мг, на весь курс лечения необходимо 56 таб.*

Задача № 3

Дозировка одной таблетки лекарственного вещества составляет 0,1 г. Какую часть таблетки нужно дать больному, если ему прописана разовая доза 25 мг.

РЕШЕНИЕ:

25 мг = 0,025 г, т.к . 1 г = 1000 мг

1 таб – 0,1 г

х - 0,025 г

х= = 0,25 г ; 0,25= =

Ответ: *больному необходимо дать ¼ часть таблетки.*

Задача № 4

В 1 литре водного раствора содержится 80 г сухого вещества. Какова процентная концентрация данного раствора?

РЕШЕНИЕ:

ω% = (1 л = 1000 мл = 1000 г) ***Ответ:*** *8%.*

Задача № 5

Сколько нужно взять сухого вещества, чтобы приготовить 2 литра 3% раствора данного вещества?

РЕШЕНИЕ: Т.к. процент – это количество вещества в 100 мл.

Следовательно, в 100 мл содержится 3 г сухого вещества, 1 л = 1000 мл,

значит 2 л = 2000 мл.

3 г – 100 мл

х - 2000 мл

х= = 60 г. ***Ответ:*** *Для приготовления 2-х литров 3% раствора необходимо взять 60 г сухого вещества.*

Задача № 6

Сколько нужно взять хлорамина (сухое вещество) в г и воды в мл для приготовления 3-х литров 5% раствора?

РЕШЕНИЕ: 3 л = 3000 мл, плотность воды = 1

100 г воды = 100 мл воды.

5 г – 100 мл

х - 3000 мл

х= = 150 г 3000г – 150г = 2850 мл ***Ответ:*** *Для приготовления 3-х литров 5% раствора необходимо взять 150 г сухого вещества и 2850 мл воды.*

Задача № 7 *Больному необходимо ввести 500 тысяч единиц пенициллина. Флакон по 1 миллиону единиц. Развести 1:1. Сколько мл раствора необходимо взять?*

РЕШЕНИЕ:

<u>при разведении 1:1 в 1 мл раствора содержится 100 тысяч единиц действия,</u>

Ответ: *100 000 единиц - 1 мл, следовательно, 1000 000 единиц – 10 мл.*

Если больному необходимо ввести 500 тысяч единиц, то необходимо взять 5 мл полученного раствора.

Задача № 8.

Во флаконе оксациллина находится 0,25 сухого лекарственного средства. Сколько нужно взять растворителя, чтобы в 1 мл раствора было 0,1 г сухого вещества?

<u>См. справочный материал «Стандартное разведение антибиотиков».</u>

РЕШЕНИЕ: при разведении антибиотика на 0,1 г сухого порошка берут 0,5 мл растворителя, следовательно, если,

0,1 г сухого вещества – 0,5 мл растворителя

0,25 г сухого вещества - х мл растворителя

получаем: х= = 1,25 мл ***Ответ:*** *чтобы в 0,5 мл раствора было 0,1 г сухого вещества необходимо взять 2,5 мл растворителя.*

Задача № 9

Рассчитать какое количество антисептика потребуется для приготовления 500 мл 0,2% раствора фурацилина.

РЕШЕНИЕ: 0, 2 г – 100 мл

х - 500 мл

*х= = 1 г :****Ответ:*** *чтобы приготовить 500 мл 0,2% раствора фурацилина необходимо взять 1 г фурацилина.*

Задача № 10

Определить цену деления шприца, если от подыгольного конуса до цифры «5» - 5 делений.

$$\frac{\textit{вместимость шприца}}{\textit{количество делений}} = \textit{количество мл между двумя близлежащими делениями цилиндра}$$

РЕШЕНИЕ: Для определения цены деления шприца необходимо цифру «5» разделить на количество делений «5».

Ответ: *цена деления шприца равна 1 мл.*

Задача № 11 *Определить цену деления шприца, если от подыгольного конуса до цифры «1» - 10 делений.*

РЕШЕНИЕ:

Для определения цены деления шприца необходимо цифру «1» разделить на количество делений «10».

Ответ: *цена деления шприца равна 0,1 мл.*

Задача № 12

Определить цену деления инсулинового шприца в ЕД, если от подыгольного конуса до числа «20» - 5 делений.

РЕШЕНИЕ:

*Для определения цены деления инсулинового шприца необходимо число «20» разделить на количество делений «5». **Ответ:** цена деления шприца равна 4ЕД.*

Задача № 13

Больному необходимо ввести 24 единицы инсулина. Цена деления шприца 0,1 мл. Сколько мл инсулина необходимо взять?

РЕШЕНИЕ:

В 1 мл инсулина содержится 40 единиц инсулина. В 0,1 мл инсулина содержится 4 единицы инсулина. Чтобы ввести больному 24 единицы инсулина необходимо взять 0,6 мл инсулина: 24:4x0,1=0,6 мл.

***Ответ:** Чтобы ввести больному 24 единицы инсулина необходимо взять 0,6 мл инсулина.*

***Задача № 14** Сколько нужно взять сухого вещества, чтобы приготовить 3 литра 12% раствора данного вещества?*

РЕШЕНИЕ: 12 г – 100 мл

х - 3000 мл

*х= = 360 г :**Ответ:** Для приготовления 3-х литров 12% раствора необходимо взять 360 г сухого вещества на 3 литра воды.*

Задача № 15

Больной должен принимать лекарство по 2,5 мг в таблетках 3 раза в день в течение 5 дней. Сколько необходимо выписать данного лекарства больному (расчет вести в граммах)?

РЕШЕНИЕ:

1 г = 1000 мг, следовательно, 2,5 мг = 0,0025 г - разовая доза.

3х0,0025г = 0,0075 г – дневная доза,

*следовательно, на 5 дней ему необходимо: 5х0,0075г = 0,0375 г.**Ответ:** больному необходимо 0,0375 г. лекарства на весь курс лечения.*

Задача № 16

Больному необходимо ввести 36 единиц инсулина. Цена деления шприца 0,1 мл. Сколько мл инсулина необходимо взять?

РЕШЕНИЕ:

В 1 мл инсулина содержится 40 единиц инсулина. В 0,1 мл инсулина содержится 4 единицы инсулина. Чтобы ввести больному 36 единиц инсулина необходимо взять 0,9 мл инсулина: 36:4x0,1=0,9 мл.

***Ответ:** Чтобы ввести больному 36 единиц инсулина необходимо взять 0,9 мл инсулина.*

Задача № 17

Больной должен принимать лекарство по 1 ст. л. 4 раза в день в течение 5 дней. Сколько необходимо больному лекарственного препарата в мл на весь курс лечения?

РЕШЕНИЕ: 1 ст. л. = 15 мл – разовая доза, следовательно, 4х15 мл = 60 мл - дневная доза.

*5х60 мл = 300 мл лекарства необходимо на 5 дней. **Ответ:** больному необходимо 300 мл лекарства на весь курс лечения.*

Задача № 18

Сколько нужно взять сухого вещества, чтобы приготовить 2 литра 10% раствора данного вещества?

РЕШЕНИЕ: 10 г – 100 мл

х - 2000 мл

х= = 200 г **Ответ:** Для приготовления 2-х литров 10% раствора необходимо взять 200 г сухого вещества на 2 литра воды.

Задача № 19

Во флаконе ампициллина находится 0,5 сухого лекарственного средства. Сколько нужно взять растворителя, чтобы в 0,5 мл раствора было 0,1 г сухого вещества.

РЕШЕНИЕ: при разведении антибиотика на 0,1 г сухого порошка берут 0,5 мл растворителя, следовательно, если,

0,1 г сухого вещества – 0,5 мл растворителя

0,5 г сухого вещества - х мл растворителя

получаем: х= = 2,5 мл

Ответ: чтобы в 0,5 мл раствора было 0,1 г сухого вещества необходимо взять 2,5 мл растворителя.

9. Задачи для самостоятельного решения.

1. Приготовить 3 л. 1% раствора хлорамина.
2. Приготовить 7 л. 0,5% раствора хлорамина.
3. Приготовить 4 л. 1% раствора хлорной извести.
4. Приготовить 2 л. 10% раствора хлорной извести.
5. Приготовить 0,5 л. 0,2% раствора фурацилина.
6. Найти %-ую концентрацию раствора соли (ω ¿ , если 60 г соли развели в 3 литрах воды.
7. Найти %-ую концентрацию раствора хлорамина (ω ¿ , если 50 г хлорамина развели в 5 литрах воды.
8. В 2-х литрах водного раствора содержится 80 г сухого вещества. Какова %-я концентрация данного раствора?
9. В 5 литрах водного раствора содержится 100 г сухого вещества. Какова %-я концентрация данного раствора?
10. Больному увеличена доза препарата в 2 раза и составила 250 мл в сутки. На сколько процентов увеличилась доза препарата?
11. Вместимость мочевого пузыря человека 600 мл. Он заполнен на 58%. Сколько это составляет миллилитров?
12. В норме физиологическая потеря в родах составляет 0,5% от массы тела. Определить кровопотерю, если масса женщины 54 кг, 75 кг, 62 кг.
13. Определить кровопотерю в родах в мл., если она составила 15% ОЦК, при этом ОЦК составляет 5000 мл.
14. Определить шоковый индекс, если ЧСС (пульс) – 140, а систолическое давление 80 мм.рт.ст.
15. Определить шоковый индекс, если ЧСС (пульс) – 100, а систолическое давление 130 мм.рт.ст.

16. *Ребенок родился ростом 59 см. Какой рост должен быть у него в 7 месяцев (5 лет)?*
17. *Ребенок родился ростом 52 см. Какой рост должен быть у него в 5 месяцев (8 лет)?*
18. *Ребенок родился весом 3700 г. Какой вес должен быть у него в 9 месяцев, 4 года, 12 лет?*
19. *Какое артериальное давление должно быть у ребенка в 5 лет, 7 лет, 12 лет?*
20. *Рассчитать суточную калорийность пищевого рациона ребенка 3 лет, 9 лет, 11 лет?*
21. *Определить количество мочи, выделяемой за сутки ребенком 3 лет, 8 лет, 10 лет?*
22. *Определить цену деления шприца, если от подыгольного конуса до цифры «1» - 20 делений.*
23. *Определить цену деления шприца, если от подыгольного конуса до цифры «3» - 15 делений.*
24. *Определить цену деления шприца, если от подыгольного конуса до цифры «2» - 10 делений.*
25. *Определить цену деления инсулинового шприца в ЕД , если от подыгольного конуса до числа «100» - 10 делений.*
26. *Определить цену деления инсулинового шприца в ЕД , если от подыгольного конуса до числа «20» - 5 делений.*
27. *Больному необходимо ввести 36 единиц инсулина, цена деления шприца 0,1 мл. Сколько инсулина в мл. необходимо взять?*
28. *Во флаконе ампициллина находится 0,5 г сухого лекарственного вещества. Сколько нужно взять растворителя, чтобы в 0,2 мл раствора было 0,05 г сухого вещества?*
29. *Во флаконе оксацалина находится 0,25 г сухого лекарственного средства. Сколько нужно взять растворителя, чтобы в 2 мл раствора было 0,2 г сухого вещества?*
30. *Сколько атропина сульфата содержится в 1 мл 0,1% раствора?*
31. *Сколько нужно взять растворителя для разведения 20 млн. ЕД пенициллина, чтобы в 0,5 мл раствора содержалось 100 000 ЕД сухого вещества?*
32. *Сколько нужно взять хлорамина (сухое вещество) и воды, чтобы приготовить 4 л 2% -го раствора данного вещества?*
33. *Сколько нужно взять хлорамина (сухое вещество) и воды, чтобы приготовить 5 л 1% -го раствора данного вещества?*
34. *Сколько нужно взять хлорамина (сухое вещество) и воды, чтобы приготовить 3 л 0,5% -го раствора данного вещества?*
35. *Приготовить 1 литр 1% раствора хлорной извести для обработки инвентаря из 1 литра маточного 10% раствора?*
36. *Больной должен принимать лекарственный препарат в таблетках по 10 мг 2 раза в день в течение 30 дней. Сколько необходимо выписать данного лекарства в граммах на весь курс лечения?*
37. *Больной должен принимать лекарственный препарат в таблетках по 20 мг 2 раза в день в течение 14 дней. Сколько необходимо выписать данного лекарства в граммах на весь курс лечения?*
38. *Больному по предписанию врача необходимо принимать микстуру от кашля по 1 чайной ложке 4 раза в день в течение 5 дней. Сколько миллилитров лекарства потребуется больному на весь курс лечения?*
39. *Дозировка 1 таблетки лекарственного препарата составляет 0,1 г. Какую часть таблетки необходимо дать больному, если ему прописана разовая доза 50 мг?*

40. *Дозировка 1 таблетки лекарственного препарата составляет 0,5 г. Какую часть таблетки необходимо дать больному, если ему прописана разовая доза 125 мг?*

СОДЕРЖАНИЕ

<u>Литература</u>*:*Основные источники:

Дружинин И.В. Математика для студентов медицинских колледжей, уч.пособие, 2019г.

Пехлецкий И.Д. Математика (8-е изд.) учебник 2019г.

Григорьев С.Г. Математика/ Под ред. Гусева В А. (7-е изд, перераб. и доп.) учебник, 2018г.

Дополнительные источники:

1. ***Омельченко В.П., Демидова А.А.*** *Математика: компьютерные технологии в медицине. – Ростов - на Дону: «Феникс», 2017*
2. ***Филимонова Е.В.*** *Математика: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений – Ростов на дону: «Феникс», 2018.*

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ПРОГРАММЫ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Требования к минимальному материально-техническому обеспечению

Реализация учебной дисциплины требует наличия учебного кабинета «Математики».

Оборудование учебного кабинета:

- рабочее место преподавателя;
- посадочные места по количеству обучающихся;
- учебно-методический комплекс по дисциплинам «Алгебра» и «Геометрия»;
- наглядные пособия: таблицы, карточки с заданиями

Технические средства обучения:

- компьютер с лицензионным программным обеспечением,
- мультимедиа-проектор,
- интерактивная доска.

Информационное обеспечение обучения

Перечень рекомендуемых учебных изданий, Интернет-ресурсов, дополнительной литературы

Основные источники:

1. Колмогоров А.Н. и др. Алгебра и начала анализа. 10 (11) кл. – М., 2016.
2. Атанасян Л.С. и др. Геометрия. 10 (11) кл. – М., 2016.

Дополнительные источники

1. Алимов Ш.А. и др. Алгебра и начала анализа. 10 -11 кл. – М., 2015.
2. Колягин Ю.М. и др. Математика (Книга 1). – М., 2015.
3. Колягин Ю.М. и др. Математика (Книга 2). – М., 2015.
4. Луканкин Г.Л., Луканкин А.Г. Математика. Ч. 1: учебное пособие для учреждений начального профессионального образования. – М., 2016.
5. Пехлецкий И.Д. Математика: учебник. – М., 2015.
6. Смирнова И.М. Геометрия. 10 -11 кл. – М.:, 2016.
7. Погорелов А.В, Геометрия 10-11 кл. – М., 2016
8. Башмаков М.И. Математика (базовый уровень). 10—11 кл. – М., 2016.
9. Башмаков М.И. Математика: 10 кл. Сборник задач: учеб. пособие. – М., 2016.

Литература для преподавателя

1. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия (базовый и профильный уровни). 10—11 кл. – М, 2015.
2. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Геометрия (базовый и профильный уровни). 10-11. – М, 2015.
3. Колягин Ю.М., Ткачева М.В, Федерова Н.Е. и др. под ред. Жижченко А.Б. Алгебра и начала математического анализа (базовый и профильный уровни). 10 кл. – М., 2015.
4. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н. и др. Алгебра и начала математического анализа (базовый и профильный уровни). 11 кл. – М., 2016.
5. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н. и др. Алгебра и начала математического анализа (базовый и профильный уровни). 10 кл. – М., 2016.
6. Шарыгин И.Ф. Геометрия (базовый уровень) 10—11 кл. – 2015.

Методическое обеспечение

1. Комплект тестов по всем темам программы.
2. Комплект заданий для контрольных работ по темам программы.
3. Комплект индивидуальных карточек-заданий.
4. Комплект таблиц по алгебре и началам анализа и по геометрии.
5. Комплект стереометрических тел.

Интернет – ресурсы:

- http://минобрнауки.рф/ - Министерство образования РФ;
- http:/edu.ru/ - Федеральный образовательный портал;
- http://school-collection.edu.ru/ – Электронный учебник «Математика в школе, XXI век».
- http://fcior.edu.ru/ - информационные, тренировочные и контрольные материалы.

Программное обеспечение, Интернет – ресурсы

Ресурсы локального доступа

2. Электронное приложение к учебнику Алгебра и начала математического анализа: учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений [Электронный ресурс] /А.Н. Колмогоров. М.: Просвещение, 2009. – 1 электрон. опт. диск (DVD)

Ресурсы удаленного доступа

4. Реализовано в России [Электронный ресурс] / Московский институт открытого образования, при участии Московского центра непрерывного математического образования: МИОО, 2009. – Режим доступа к сайту.: http://mathege.ru
5. Методические и учебные материалы по математике. [Электронный ресурс] / Математика в Интернет. ООО «Физикон», 1999. – Режим доступа к сайту.: http://www.college.ru/mathematics

Интернет-сборник задач по школьному курсу математики [Электронный ресурс] / 2009. – Режим доступа к сайту.: 1000zadach.info